Repaso de valores absolutos, ecuaciones y desigualdades

1. Indica los valores $x \in \mathbb{R}$ para los que se satisfacen las siguientes *igualdades*:

a) $x^2 - 9x + 20 = 0$,
b) $x^2 + 2x = 1$,
c) $x^4 - 4 = 0$,
d) $\sqrt[3]{1+x} = 2$,
e) $-1 + \operatorname{sen} x = 0$,
f) $-1 + \log \frac{x}{e} = 0$.

2. Encuentra todos los valores $x \in \mathbb{R}$ que satisfagan las siguientes *desigualdades*:

a) $|4x+3| \leq 1$,
b) $|x+1| \leq |x-1|$,
c) $|x^2 - 5x + 6| < 2$,
d) $|x+1| + |x+3| < 5$,
e) $\dfrac{x-1}{(x+2)(x-3)} > 0$,
f) $\dfrac{x^2-2}{x^2-4} \leq 0$,
g) $\dfrac{x^2+4}{x^2-2x} > 0$,
h) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} < 1$.

3. Decide si las siguientes desigualdades son válidas o no para *todos* los valores posibles de x e y que se indican a continuación:

a) $|x - y| \leq |x| + |y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

b) $(1+x)^2 \geq 1 + x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

c) $x^2 - x + 1 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

d) $x^4 + \dfrac{1}{x^4} \geq 2$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Inducción

4. Demuestra por inducción que las siguientes fórmulas son ciertas para todo número $n \in \mathbb{N}$:

a) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$.

b) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n+1) = \dfrac{1}{3} n(n+1)(n+2)$.

c) $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n-1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-1}$.

5. Demuestra por inducción las siguientes afirmaciones:

a) $2^n > n^2$, para todo $n \geq 5$.

b) *Desigualdad de Bernoulli:* $(1+x)^n \geq 1 + nx$, para todo $x \geq -1$, $n \geq 1$.

6. Comprueba que $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, un polinomio cuadrático de $\cos x$ y

$$\cos 4x = 2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1 = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1\,,$$

un polinomio de grado 4 de $\cos x$. Usando la inducción, demuestra que, en general,

$$\cos 2nx = P_{2n}(\cos x)\,, \qquad n \geq 1\,,$$

donde P_{2n} es cierto polinomio de grado $2n$.

Cotas superiores e inferiores. Ínfimos y supremos

7. Para cada uno de los conjuntos dados abajo, indica una cota superior y una inferior. Luego determina razonadamente el ínfimo y el supremo de cada uno de ellos. Halla también el máximo y el mínimo si existen.

a) $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\}$, b) $\{0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; \ldots\}$, c) $\{\cos x + 1 : x \in \mathbb{R}\}$.

8. Indica si los siguientes conjuntos están acotados inferior y superiormente y, en su caso, halla el ínfimo, el supremo, el máximo y el mínimo.

a) $\{x \in \mathbb{R} \,:\, |x-3| \leq 1\}$, b) $\{x \in \mathbb{R} \,:\, x^3 < 27\}$,

c) $\{x^2 - 6x + 9 \,:\, x \in \mathbb{R}\}$, d) $\{(-1)^n - n^{-1} \,:\, n \in \mathbb{N}\}$.