Cálculo I (Grado en Ingeniería Informática) 2013-14

Examen final, enero de 2014

PUNTUACIÓN DEL EXAMEN:

P. 1	P. 2	P. 3	P. 4	P. 5	P. 6	TOTAL

Inicial del primer apellido: ________

NOMBRE: _________________________

APELLIDOS: ____

D.N.I. O PASAPORTE: ______________________________

FIRMA: ____

Notas y comentarios:

- **Todos los problemas son de desarrollo y puntúan igual.**
- **Se pide seleccionar 5 de los 6 problemas y elegir uno a descartar, marcando una cruz (X) en la tabla de puntuación arriba en el sitio adecuado. Si no se marca ninguno como descartado, los profesores de la asignatura elegirán el problema que no se corregirá.**
- Algunas derivadas útiles:

$$(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}\,, \qquad (\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

- Algunas series de Taylor útiles:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots\,,\ |x| < 1\,, \qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\,,\ x \in \mathbb{R}\,,$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\,,\ x \in \mathbb{R}\,, \qquad \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\,,\ x \in \mathbb{R}\,.$$

- Teorema de Bolzano: Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$. Si $f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signo, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.
- Teorema del valor medio: Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = (f(b) - f(a))/(b-a)$. (El caso especial cuando $f(a) = f(b)$ y $f'(c) = 0$ es el teorema de Rolle.)

---

1. Calcule el valor del límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{7x^2 - x^5}{1 - \cos^2 x}\,.$$

Explique el procedimiento utilizado.

Solución: Los límites del numerador y del denominador cuando $x \to 0$ son 0 (i.e, el límite es de la forma $0/0$), por lo que podemos aplicar la regla de L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{7x^2 - x^5}{1 - \cos^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{14x - 5x^4}{2\cos x \operatorname{sen} x}$$

Este nuevo límite vuelve a ser una vez más de la forma $0/0$, con lo que volvemos a aplicar L'Hopital para obtener

$$\lim_{x\to 0} \frac{14x - 5x^4}{2\cos x \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{14 - 20x^3}{-2\operatorname{sen}^2 x + 2\cos^2 x}$$

En este último límite, el numerador y el denominador son funciones continuas (al ser funciones elementales), y sus límites cuando $x \to 0$ son respectivamente 14 y 2, por lo que

$$\lim_{x\to 0} \frac{7x^2 - x^5}{1 - \cos^2 x} = \frac{14}{2} = 7$$

2. Consideremos la función

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{\pi^2 x^2}{8}.$$

(a) Demuestre que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución en el intervalo abierto $(0, 1)$.

Solución: Lo primero es observar que la función $f(x)$ es continua y diferenciable en todo el intervalo $[0, 1]$ por ser composición de funciones elementales; además $f(0) = 1$ y $f(1) = -\frac{\pi^2}{8}$ tienen signos diferentes. Por el teorema de Bolzano, f tiene al menos un cero en el intervalo $(0, 1)$.
Nos queda sólo demostrar que no puede tener más de un cero. Para ello observamos que

$$f'(x) = -\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{\pi^2 x}{4};$$

como las x que estamos considerando están en el intervalo $(0, 1)$, ambos sumandos en $f'(x)$ van a ser negativos, por lo que $f'(x) \neq 0$ en todo $x \in (0, 1)$.
Ahora concluimos el problema usando el teorema de Rolle: si f tuviera dos o más ceros en el intervalo $(0, 1)$, debería haber al menos un punto en $(0, 1)$ entre esos ceros tal que $f'(x) = 0$; como esto último no se cumple, f no puede tener más de un cero.

(b) Determine el polinomio de Taylor de orden 3 de la función f centrado en $x = 0$.

Solución: Hay varias formas de hacer este problema. La más rápida es usar la fórmula para el polinomio de Taylor de $\cos x$ (dada en la introducción al examen) remplazando la x por $\frac{\pi x}{2}$, y recordar que el polinomio de Taylor de grado 3 de $\frac{\pi^2 x^2}{8}$ centrado en 0 coincide con $\frac{\pi^2 x^2}{8}$. Esto nos daría

$$p_{3,0}(x) = 1 - \frac{\left(\frac{\pi x}{2}\right)^2}{2} - \frac{\pi^2 x^2}{8} = 1 - \frac{\pi^2 x^2}{8} - \frac{\pi^2 x^2}{8} = 1 - \frac{\pi^2 x^2}{4}.$$

La otra posibilidad es hallar $f(0), f'(0), \ldots, f'''(0)$ y sustituir en la fórmula del polinomio de Taylor. Esto resulta en

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{\pi^2 x^2}{8}, \\
f'(x) &= -\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{\pi^2 x}{4}, \\
f''(x) &= -\frac{\pi^2}{4}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{\pi^2}{4}, \\
f'''(x) &= \frac{\pi^3}{8}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right),
\end{aligned}$$

y en

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = -\frac{\pi^2}{2}, \quad f'''(0) = 0.$$

Con lo que al sustituir en la fórmula del polinomio de Taylor nos queda el polinomio $p_{3,0}(x)$ anterior.

3. Calcule razonadamente la integral $I = \displaystyle\int_1^3 \frac{x\,dx}{x^4+1}$.

Solución: Hacemos el cambio de variable $u = x^2$, con lo que $du = 2x\,dx$ y $x^4+1 = u^2+1$: la integral queda entonces como

$$I = \int_1^9 \frac{du}{2(u^2+1)}$$

(observe que hemos cambiado los límites de la integral de acuerdo con el cambio de variable). En esta integral reconocemos la derivada de la arco tangente, así que

$$I = \frac{1}{2}\int_1^9 \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{arc\,tg} u\right]_1^9 = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arc\,tg} 9 - \operatorname{arc\,tg} 1\right) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arc\,tg} 9 - \pi/4\right).$$

4. Definamos la función F mediante la fórmula

$$F(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2}\, dt\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

(a) Calcule razonadamente su derivada, $F'(x)$. Luego determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los puntos de máximo y mínimo de la función F.

Solución: La función f es composición de las funciones $G(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt$ y de $g(x) = x^2$, i.e, $F(x) = G(g(x))$. Por la regla de la cadena,

$$F'(x) = G'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{-(x^2)^2} \cdot 2x = 2xe^{-x^4}$$

donde hemos usado que por el teorema fundamental del cálculo, $G'(x) = e^{-x^2}$.
Para calcular intervalos de crecimiento y decrecimiento, buscamos los intervalos donde $F'(x)$ sea positiva y negativa. $F'(x)$ tiene un único cero, ya que e^{-x^4} es siempre positivo, y $F'(x)$ sólo se anulará donde lo haga x; además $F'(x)$ tiene el signo de x; por ello, F es decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, \infty)$. Esto implica que F tiene un único mínimo en $x = 0$, que además debe ser un mínimo global.

(b) Determine los intervalos de convexidad y concavidad de F y los puntos de inflexión.

Solución: Empezamos calculando la segunda derivada de F:

$$F''(x) = e^{-x^4} + x(-4x^3)e^{-x^4} = (1 - 4x^4)e^{-x^4}$$

F'' se anula sólo cuando $1 - 4x^4 = 0$, lo que ocurre en los puntos $x = \pm 1/\sqrt{2}$. Por ello examinamos el signo de F'' en los intervalos $(-\infty, -1/\sqrt{2})$, $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ y $(1/\sqrt{2}, \infty)$ evaluando F'' en un punto de cada uno:

$$F''(-1) = -3e^{-1} < 0, \quad F''(0) = 1, \quad F''(1) = -3e^{-1}$$

Por lo tanto F es cóncava en $(-\infty, -1/\sqrt{2})$ y $(1/\sqrt{2}, \infty)$ y convexa en $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Los puntos $x = -1/\sqrt{2}$ y $1/\sqrt{2}$ corresponden a puntos d inflexión, ya que se cambia de cóncavo a convexo o viceversa.

5. Decida si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$ diverge, converge condicionalmente o converge absolutamente. Razone su respuesta.

Solución: La serie es de términos alternados, ya que aparece un $(-1)^n$ y $n/(n^2+1)$ es siempre positivo.

- Primero estudiamos la convergencia de la serie sin el signo, i.e, de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}.$$

  Observamos que

$$\frac{n}{n^2+1} > \frac{n}{n^2+n^2} = \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n}.$$

  Puesto que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ por el Teorema de comparación obtenemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ diverge, y al menos sabemos que la serie original no puede converger absolutamente.

- Intentamos ver si se aplica el criterio de Leibniz:

  - $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0;$
  - la sucesión $a_n = \frac{n}{n^2+1}$ es decreciente, ya que la desigualdad

$$\frac{n}{n^2+1} \geq \frac{n+1}{(n+1)^2+1}$$

    se obtiene de $n((n+1)^2+1) \geq (n^2+1)(n+1)$ que se puede demostrar multiplicando.

  Por ello, el criterio de Leibniz se aplica y la serie dada converge; como no lo hace absolutamente, la convergencia es condicional.

6. Sea $\{a_n\}$ la sucesión definida de forma recurrente como

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 - 4a_n + 8}, \qquad a_1 = 4\,.$$

(a) Demuestre, utilizando inducción si es necesario, que

- $a_n \geq 2$ para todo n,
- $a_n \geq a_{n+1}$,

Solución:

- Para la primera desigualdad, observamos que $a_n^2 - 4a_n + 8 = (a_n - 2)^2 + 4 \geq 4$; como la raiz cuadrada es una función creciente,

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 - 4a_n + 8} \geq \sqrt{4} = 2.$$

  Esto da la desigualdad para todos los a_n con $n \geq 2$; el caso a_1 es inmediato porque $a_1 = 4$.

- Usamos una vez más la fórmula para a_{n+1}:

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 - 4a_n + 8} \leq \sqrt{a_n^2 - 4 \cdot 2 + 8} = \sqrt{a_n^2} = |a_n| = a_n$$

  Hemos usado que la raíz cuadrada es creciente, y que a_n es positivo ya que $a_n \geq 2$ como se vio en el primer apartado.

(b) Utilice lo anterior para demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existe. Luego calcule el límite.

Solución: El límite existe porque los a_n forman una sucesión decreciente y acotada inferiormente como se ha visto en el primer apartado del problema. Llamamos $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ y tomamos límites en la igualdad

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 - 4a_n + 8}, \qquad L = \sqrt{L^2 - 4L + 8}.$$

Resolviendo lo anterior, se tiene que $L = 2$.