Cálculo I (Grado en Ingeniería Informática)

Problemas resueltos, 2012-13 y 2013-14 (tercera parte)

Preparado por los profesores de la asignatura: Pablo Fernández, Dragan Vukotić (coordinadores), Luis Guijarro, Kazaros Kazarian y José Luis Torrea

1. Para la función $f(x) = x \operatorname{sen} x$, halle su polinomio de Taylor de orden 2 en $a = 0$.

SOLUCIÓN. La respuesta es: $P_2(x) = x^2$. Como recordaremos de la teoría vista en clase, los polinomios de Taylor en $a = 0$ de la función $\operatorname{sen} x$ son

$$x\,, \quad x - \frac{x^3}{3!}\,, \quad x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\,,$$

etc. Multiplicándolos por x, obtenemos que los polinomios correspondientes de $f(x)$ son x^2, $x^2 - x^4/3!$, etc. El primero es de grado 2 mientras que el siguiente ya es de grado 4; por tanto, $P_2(x) = x^2$.
Otra manera de llegar a la misma conclusión es calculando

$$f'(x) = \operatorname{sen} x + x \cos x\,, \qquad f''(x) = 2\cos x - x \operatorname{sen} x$$

y evaluándolos en $x = 0$, para luego calcular $P_2(x) = f(0) + f'(0) + \dfrac{f''(0)}{2}x^2 = x^2$.

2. Calcule el polinomio de Taylor de grado 6 de la función $f(x) = \cos x$ en el punto $x = 0$. Utilizando la fórmula anterior, calcule $g^{(8)}(0)$ de la función $g(x) = \cos x^2$.

SOLUCIÓN. Calculando las derivadas de f de todos los órdenes hasta 6 y aplicando la fórmula general para el polinomio de Taylor o, alternativamente, partiendo de la fórmula (vista en clase) para la serie de Taylor de la función coseno en $x = 0$, obtenemos

$$P_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$

Sustituyendo x^2 en lugar de x, se obtiene el polinomio de Taylor (Maclaurin) de orden 12 de la función g:

$$1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{12}}{6!}$$

El coeficiente al lado de x^8 es igual a $g^{(8)}(0)/8!$. Igualando ambas cantidades, vemos que

$$\frac{1}{4!} = \frac{g^{(8)}(0)}{8!}\,.$$

Despejando, obtenemos

$$g^{(8)}(0) = \frac{8!}{4!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 56 \cdot 30 = 1680\,.$$

3. Estime el error de aproximación de la función $f(x) = \cos x$ cerca de $a = 0$ por el polinomio de Taylor de grado 3 y en el punto $x = \dfrac{1}{10}$.

SOLUCIÓN. Para obtener el polinomio de Taylor $P_n(x)$ de orden n de la función coseno, tenemos dos formas de proceder:
1) usar el desarrollo de $\cos x$ en serie de Taylor alrededor de $a = 0$; en este caso:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots ,$$

truncando luego la serie después de la potencia x^n;
2) calcular las derivadas sucesivas $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $\ldots$, evaluándolas en $a = 0$, etc.
De cualquiera de las dos maneras, obtendremos:

$$P_0(x) = 1 = P_1(x)\,, \quad P_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2} = P_3(x)\,, \quad P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} = P_5(x)\,, \quad \ldots$$

Los polinomios P_2 y P_3 coinciden porque $f'''(0) = 0$, lo cual significa que no hay ningún término con x^3. Lo que nos interesa en concreto en este caso es $P_3(x) = 1 - x^2/2$ y $x = 1/10$. El error que se comete al aproximar $\cos x$ por $P_3(x)$, según la fórmula vista en clase, es igual a $E = f^{(4)}(c)(x-a)^4/4!$ para algún punto c entre $a = 0$ y $x = 1/10 = 0,1$. Recordando que $f^{(4)}(x) = \cos x$, tenemos la siguiente estimación para E;

$$|E| \leq \frac{|f^{(4)}(c) \cdot 0,1^4|}{24} = \frac{|\cos c| \cdot 0,0001}{24} \leq \frac{0,0001}{24} \approx 0,00004167\,.$$

4. Calcule la integral indefinida

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, \cos x \, dx\,.$$

SOLUCIÓN. Aplicando el cambio de variable: $\operatorname{sen} x = t$, $\cos x \, dx = dt$, la integral se transforma en

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, \cos x \, dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C\,,$$

donde la constante C es arbitraria.

5. Calcule la integral indefinida $\int \operatorname{arc\,tg} x \, dx$.

SOLUCIÓN. Aplicando Integración por partes, con $u = \operatorname{arc\,tg} x$ y $dv = dx$, obtenemos

$$du = \frac{1}{x^2+1}\, dx\,, \qquad v = x\,.$$

Por lo tanto, según la fórmula para la Integración por partes, se obtiene

$$\int \operatorname{arc\,tg} x \, dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x\, dx}{x^2+1} = x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+1} + C\,.$$

(La última integral se suele calcular o bien directamente o bien mediante la sustitución $x^2 + 1 = t$.)

6. Evalúe la integral indefinida

$$\int \frac{dx}{9\,x^2 + 6\,x + 5}\,.$$

Solución. Completando el cuadrado en el denominador:

$$9x^2 + 6x + 5 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x + 1 + 4 = (3x+1)^2 + 4\,,$$

obtenemos

$$I = \int \frac{dx}{9\,x^2 + 6\,x + 5} = \int \frac{dx}{(3x+1)^2 + 4} = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{dx}{\left(\frac{3x+1}{2}\right)^2 + 1}\,.$$

Después del siguiente cambio de variable (bastante obvio):

$$(3x+1)/2 = t\,, \qquad dx = (2t/3)\,dt\,,$$

se obtiene

$$I = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{6} \operatorname{arc\,tg} t + C = \frac{1}{6} \operatorname{arc\,tg} \frac{3x+1}{2} + C\,,$$

donde C denota una constante real arbitraria.

7. Calcule la integral indefinida

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, \cos^3 x \, dx\,,$$

aplicando la relación fundamental entre las funciones trigonométricas: $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

Solución. Observemos que

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, \cos^3 x \, dx = \int \operatorname{sen}^2 x \, \cos^2 x \, \cos x \, dx = \int \operatorname{sen}^2 x \, (1 - \operatorname{sen}^2 x) \, \cos x \, dx\,.$$

Al igual que antes, podemos aplicar el cambio de variable $\operatorname{sen} x = t$, obteniendo $\cos x \, dx = dt$. La integral se convierte en

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, \cos^3 x \, dx = \int t^2(1-t^2)\, dt = \int (t^2 - t^4)\, dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} + C\,.$$

8. Calcule el valor exacto de la integral

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}\,.$$

Solución. Aplicando el *cambio de variable* $\sqrt{x} = t$ en nuestra integral definida, obtenemos:

$$\frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt\,, \quad x = t^2\,; \qquad x = 1:\ t = 1\,, \quad x = 3:\ t = \sqrt{3}\,,$$

de manera que

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = 2 \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} = 2 \operatorname{arc\,tg} x |_1^{\sqrt{3}} = 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6}\,.$$

9. Calcule la integral indefinida
$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \, \cos x}\,.$$

Solución. Primero aplicamos un truco visto en otros ejercicios similares:
$$I = \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \, \cos x} = \int \frac{\cos x \, dx}{\operatorname{sen}^2 x \, \cos^2 x}$$
y luego el cambio de variable $t = \operatorname{sen} x$. Observemos que $|t| < 1$ y $t \neq 0$ puesto que $\operatorname{sen} x \, \cos x \neq 0$. Del cambio de variable obtenemos que
$$dt = \cos x \, dx\,, \qquad \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x = 1 - t^2$$
y, por tanto,
$$I = \int \frac{dt}{t^2\,(1-t^2)} = \int \frac{dt}{t^2\,(1+t)\,(1-t)}\,.$$
De esta manera hemos conseguido reducir la integral I a la integral de una función racional de t. Ésta se puede calcular usando las **fracciones simples o parciales**:
$$\frac{1}{t^2\,(1+t)\,(1-t)} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{1-t} + \frac{C}{t} + \frac{D}{t^2}\,.$$
Multiplicando ambos lados por el denominador de la izquierda: $t^2\,(1+t)\,(1-t)$, obtenemos la condición
$$1 = At^2\,(1-t) + Bt^2\,(1+t) + Ct\,(1-t^2) + D\,(1-t^2)\,.$$
Agrupando los términos constantes y los términos que contienen a t, t^2 y t^3 respectivamente, vemos que
$$1 = D + Ct + (A + B - D)t^2 + (-A + B - C)t^3\,.$$
Para que el polinomio (constante) a la izquierda y el polinomio a la derecha sean iguales para todo $t \in \mathbb{R}$, es necesario y suficiente que sus coeficientes correspondientes sean iguales, luego
$$D = 1\,, \quad C = 0\,, \quad A + B - D = 0\,, \quad -A + B - C = 0\,.$$
De ahí se sigue inmediatamente que $D = 1$, $C = 0$, $A + B = 1$ y $B = A$. De las dos últimas ecuaciones fácilmente obtenemos $A = B = 1/2$. Por lo tanto,
$$\frac{1}{t^2\,(1+t)\,(1-t)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-t} + \frac{1}{t^2}\,,$$
que es la representación buscada. Puesto que $1 + t > 0$ y $1 - t > 0$ podemos aplicar la formula
$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C\,, \qquad x > 0\,.$$
Integrando obtenemos
$$I = \frac{1}{2}\ln(t+1) - \frac{1}{2}\ln(1-t) - \frac{1}{t} + C = \frac{1}{2}\ln\frac{t+1}{1-t} - \frac{1}{t} + C\,,$$
donde $C \in \mathbb{R}$ es una constante arbitraria. Finalmente, sustituyendo de nuevo $t = \operatorname{sen} x$, vemos que
$$I = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} + C\,.$$

10. Evalúe la integral definida

$$\int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{dx}{(x-1)(9+x^2)}\,.$$

SOLUCIÓN. Primero descomponemos la fracción en suma de fracciones simples. Dado que $9+x^2 \geq 9 > 0$, este trinomio cuadrático no tiene ceros reales, luego no se puede factorizar más (en factores lineales con coeficientes reales). Por tanto, según la teoría, buscamos los números reales A, B y C para los que

$$\frac{1}{(x-1)(9+x^2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{9+x^2}$$

para todo x. Multiplicando ambos lados por $(x-1)(9+x^2)$, obtenemos

$$1 = A(9+x^2) + (x-1)(Bx+C) = (A+B)x^2 + (C-B)x + 9A - C\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Comparando los coeficientes del polinomio a la derecha con los del polinomio constante uno, deducimos que

$$A+B=0\,, \quad C-B=0\,, \quad 9A-C=1\,.$$

Por tanto, $B=C=-A$ y $10A=1$, luego $A=1/10$ y $B=C=-1/10$. Finalmente,

$$\frac{1}{(x-1)(9+x^2)} = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{10}\cdot\frac{x+1}{9+x^2} = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{10}\cdot\frac{x}{9+x^2} - \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{9+x^2}\,.$$

La primera fracción se integra directamente, hay que tener en cuenta que $x-1>0$ puesto que $x \in [\sqrt{3}, 3]$. La segunda fracción se integra usando el cambio de variable $t = 1+x^2$ y la tercera, directamente o poniendo primero $x = 3t$. El resultado final es

$$\begin{aligned}
\int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{dx}{(x-1)(9+x^2)} &= \left(\frac{1}{10}\ln(x-1) - \frac{1}{20}\ln(9+x^2) - \frac{1}{30}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{3}\right)\Bigg|_{\sqrt{3}}^{3} \\
&= \frac{1}{10}\ln\frac{2}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{20}\ln\frac{18}{12} - \frac{1}{30}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) \\
&= \frac{1}{10}\ln(\sqrt{3}+1) - \frac{1}{20}\ln\frac{3}{2} - \frac{\pi}{360}\,.
\end{aligned}$$

11. Calcule el valor de la integral $\displaystyle\int_0^{\ln 2} xe^x\,dx$.

SOLUCIÓN. Integrando por partes:

$$u = x\,, \quad dv = e^x\,dx\,, \qquad du = dx\,, \quad v = e^x\,,$$

obtenemos

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C\,.$$

Por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo, tenemos que

$$\int_0^{\ln 2} xe^x\,dx = (xe^x - e^x)\big|_0^{\ln 2} = \ln 2 e^{\ln 2} - e^{\ln 2} - (0 - e^0) = 2\ln 2 - 2 + 1 = 2\ln 2 - 1\,.$$

12. Calcule el área comprendida entre las curvas $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y $g(x) = 4 - x$.

SOLUCIÓN. Los puntos de intersección de las dos gráficas se encuentran resolviendo la ecuación $f(x) = g(x)$, es decir, $\dfrac{1}{x} = 4 - x$. Para $x \neq 0$, la ecuación es equivalente a $1 = 4x - x^2$, que es lo mismo que $x^2 - 4x + 1 = 0$. Las soluciones de esta ecuación cuadrática son

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3},$$

siendo ambas positivas y menores que 4 ya que $2 > \sqrt{3}$. Observando las gráficas de las funciones f y g entre $x = 2 - \sqrt{3}$ y $x = 2 + \sqrt{3}$, vemos que $g(x) > f(x)$ en dicho intervalo y que encierran una región en forma parecida a la de media luna, contenida en el triángulo con los vértices $(0,0)$, $(4,0)$ y $(0,4)$. Esto se puede comprobar algebraicamente, pues en el intervalo $(2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$ se cumple $x^2 - 4x + 1 < 0$, luego $1 < 4x - x^2$ y, al ser x positivo, podemos dividir por x para deducir que $4 - x > \dfrac{1}{x}$.
El área entre las dos gráficas es, por tanto,

$$A = \int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} (g(x) - f(x))\, dx = \int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} (4 - x - \frac{1}{x})\, dx = (4x - \frac{x^2}{2} - \ln|x|)\Big|_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} - \ln\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\,.$$

13. Halle $F'(x)$ cuando la función F viene dada por $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} e^{-t}\, dt$.

SOLUCIÓN. Considerando la función $g(x) = \displaystyle\int_0^{x} e^{-t}\, dt$, vemos que F es la función compuesta de g y $h(x) = x^2$: $F(x) = g(x^2) = g(h(x))$. Por tanto, la *Regla de la Cadena* y el *Segundo Teorema Fundamental del Cálculo* nos dicen que

$$F'(x) = g'(x^2) \cdot 2x = 2xe^{-x^2}\,.$$

14. Calcule la derivada de la función $F(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{e^x+x} \ln(t^2 + 1)\, dt$.

SOLUCIÓN. Primero representamos F como diferencia de dos integrales:

$$F(x) = \int_{x^2}^{e^x+x} \ln(t^2+1)\, dt = \int_0^{e^x+x} \ln(t^2+1)\, dt - \int_0^{x^2} \ln(t^2+1)\, dt\,.$$

Derivando la diferencia, obtenemos (como en el problema anterior):

$$F'(x) = (e^x + 1)\ln((e^x + x)^2 + 1) - 2x\ln(x^4 + 1)\,.$$

15. Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función continua y $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt = 1$, ¿es cierto que siempre existe $c \in (0,1)$ tal que $\displaystyle\int_0^c f(t)\, dt = \frac{1}{3}$? Razone la respuesta.

Solución. Sí, esto se cumple siempre. Damos la prueba a continuación.
En primer lugar, puesto que $f \in C[0,1]$, podemos definir la función F mediante

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt\,, \qquad x \in [0,1]\,.$$

Según el *Teorema Fundamental del Cálculo*, F es diferenciable y, por tanto, continua en el mismo intervalo. Además, F cumple

$$F(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0\,, \qquad F(1) = \int_0^1 f(t)\,dt = 1\,.$$

Puesto que $0 < 1/3 < 1$, por el *Teorema de Bolzano* se sigue que existe $c \in (0,1)$ tal que $F(c) = 1/3$; es decir,

$$\int_0^c f(t)\,dt = \frac{1}{3}\,.$$

16. (a) Determine los puntos críticos de la función

$$F(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt\,, \qquad x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)\,,$$

en el intervalo indicado.

(b) Razone si los puntos críticos encontrados son puntos de máximo o mínimo o no.

Solución. (a) Aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo, derivamos la función F, obteniendo

$$F'(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,.$$

Para encontrar los puntos críticos de F, igualamos la derivada a cero y obtenemos $\operatorname{sen} x = 0$. Recordando que $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$, la única posibilidad es $x = \pi$.

(b) Para decidir si el punto crítico encontrado, $x = \pi$, es un punto de extremo local o no, calculamos la segunda derivada de F (aplicando la regla del cociente) y examinamos su signo en dicho punto:

$$F''(x) = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)' = \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}\,; \quad F''(\pi) = \frac{\pi\cdot(-1) - 0}{\pi^2} = -\frac{1}{\pi} < 0\,.$$

Por tanto, el punto crítico es un punto de máximo local.

17. Compruebe que la serie p-armónica

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p}\,, \qquad p \in \mathbb{R}\,,$$

converge si y sólo si $p > 1$, usando el Criterio de la integral.

SOLUCIÓN. Cuando $p \leq 0$, el término general de la serie no tiene a cero y, por tanto, la serie diverge. Por tanto, sólo nos interesa considerar el caso $p > 0$.
Cuando $p > 0$, la función $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$ es decreciente en $[1, +\infty)$ ya que el denominador es una función creciente y el numerador es constante. Por tanto, podemos aplicar el *Criterio de la integral*, que nos dice que la serie en cuestión es convergente si y sólo si converge la integral impropia

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{M\to\infty} \int_1^M x^{-p}\,dx = \lim_{M\to\infty} \left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_1^M = \lim_{M\to\infty} \frac{M^{1-p}-1}{1-p}.$$

Este último límite es finito si y sólo si $1 - p < 0$, es decir, si $p > 1$.

18. Use el criterio de la integral para decidir si la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

es convergente.

SOLUCIÓN. La función

$$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2} = \frac{1}{x \ln^2 x}$$

es decreciente en $(2, +\infty)$ ya que el denominador es una función creciente y el numerador es constante. Podemos aplicar entonces el *Criterio de la integral*. Éste nos dice que la serie en cuestión es convergente si y sólo si converge la integral impropia

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx.$$

Para estudiar la convergencia de esta última integral, empezamos reemplazando la integral impropia por el límite correspondiente

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \lim_{A\to\infty} \int_2^A \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx.$$

A continuación observamos que el cambio de variable $u = \ln x$ convierte la integral indefinida en

$$\int \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \int \frac{1}{u^2}\,du = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{\ln x} + C$$

lo cual, volviendo a la integral impropia, nos da

$$\lim_{A\to\infty} \int_2^A \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \lim_{A\to\infty} \left.-\frac{1}{\ln x}\right|_2^A = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln A} = \frac{1}{\ln 2} < \infty.$$

Puesto que la integral correspondiente converge, la serie también converge.