Cálculo I (Grado en Ingeniería Informática)

Problemas resueltos, 2012-13 y 2013-14 (segunda parte)

Preparado por los profesores de la asignatura: Pablo Fernández, Dragan Vukotić (coordinadores), Luis Guijarro, Kazaros Kazarian y José Luis Torrea

1. Halle el dominio de la función
$$f(x) = \frac{\ln(25 - x^2)}{\sqrt{x^2 - 7x + 12}}\,;$$
es decir, el conjunto más grande posible donde la función está definida.

SOLUCIÓN. Por un lado, necesitamos que exista el logaritmo, así que se debe cumplir $25 - x^2 > 0$, es decir, $x^2 < 25$. Esto es equivalente a $|x| < 5$, es decir, a $-5 < x < 5$.
Por otra parte, también necesitamos que se cumpla $x^2 - 7x + 12 > 0$ para que exista la raíz y que el denominador no sea nulo. Observando que $x = 3$ y $x = 4$ son ceros de este trinomio cuadrático, lo factorizamos como $x^2 - 7x + 12 = (x-3)\,(x-4)$. Luego es fácil ver por los métodos estándares de resolver desigualdades (ya vistos antes) que $x^2 - 7x + 12 > 0$ se cumple si y sólo si $x < 3$ ó $x > 4$.
Por tanto, el dominio de f está formado por aquellos valores que a la vez están en el intervalo $(-5, 5)$ y en uno de los intervalos $(-\infty, 3)$ ó $(4, +\infty)$. Por lo tanto, concluimos que $D(f) = (-5, 3) \cup (4, 5)$.

2. Demuestre que $\lim\limits_{x\to 3}(x^2 + 2x) = 15$ por definición (con ε y δ).

SOLUCIÓN. Necesitamos demostrar que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|x - 3| < \delta$ implica $|x^2 + 2x - 15| < \varepsilon$. Para ello, nos conviene la siguiente factorización:

$$|x^2+2x-15| = |(x^2-9)+(2x-6)| = |(x-3)(x+3)+2(x-3)| = |(x-3)(x+3+2)| = |x-3|\cdot|x+5|\,,$$

puesto que $x = 3$ es una raíz de la ecuación $x^2 + 2x - 15 = 0$.
Si $0 < \delta < 1$ y $|x - 3| < \delta$, tendremos automáticamente $|x - 3| < 1$, lo cual es equivalente a $-2 < x < 4$ y, por tanto, se seguirá que $3 < x + 5 < 9$; luego podremos decir con seguridad que $|x + 5| < 9$. Así que basta elegir $\delta > 0$ tal que $\delta \le \varepsilon/9$ y $\delta < 1$ a la vez. Entonces cuando $|x - 3| < \delta$, sabremos que también $|x + 5| < 9$ y, por tanto,
$$|x^2 + 2x - 15| = |x - 3| \cdot |x + 5| < \delta \cdot 9 \le \varepsilon\,.$$

3. ¿Cuáles de los siguientes límites existen y son finitos?
$$\lim_{x\to 0} x^{1/3} \operatorname{sen}\frac{1}{x}\,, \qquad \lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}\,.$$

SOLUCIÓN. El primer límite es cero por el teorema del encaje (o del "sandwich"), visto en clase, puesto que
$$0 \le \left| x^{1/3} \operatorname{sen}\frac{1}{x} \right| \le |x|^{1/3} \to 0\,, \quad x \to 0\,.$$
La segunda función toma todos los valores entre -1 y 1 cuando $x \to 0$ ya que $1/x$ puede tomar valores arbitrariamente grandes y por ello es fácil encontrar sucesiones a lo largo de las cuales los valores de la función tienden a valores diferentes. Por ejemplo, podemos elegir las sucesiones $x_n = \dfrac{1}{2\pi n} \to 0$ y $t_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \to 0$, cuando $n \to \infty$. Resulta que $f(x_n) = 1 \to 1$ mientras que $f(t_n) = 0 \to 0$, luego el límite $\lim\limits_{x\to 0} \cos\dfrac{1}{x}$ no existe.

4. Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si} \quad x < -2, \\ x^2 + bx + 5 & \text{si} \quad -2 \le x \le 0 \\ x + c & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

Estudie la continuidad de la función f en los puntos -2, -1 y 3 en función de los valores de los parámetros a, b y c.

SOLUCIÓN. En el intervalo $(0, +\infty)$ la función viene dada como una función lineal: $x + c$. Para cualquier valor fijo de c, ésta es continua en todos los puntos de dicho intervalo y, en particular, en $x = 3$. Los otros dos parámetros no intervienen y, por tanto, sus valores también pueden ser cualesquiera.
De manera análoga, la función $2x + a$ es continua en $(-\infty, -2)$, sea cual sea el valor del parámetro a (y lo mismo para b y c) y, por tanto, es continua en $x = -1$.
Sin embargo, la función f está definida de dos maneras diferentes a la izquierda y a la derecha del punto $x = -2$. Por tanto, hay que examinar los límites laterales de f en dicho punto, que son:

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} (2x + a) = -4 + a\,, \qquad \lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} (x^2 + bx + 5) = 9 - 2b\,.$$

Por definición, f es continua en $x = -2$ si y sólo si coinciden sus límites laterales y son iguales al valor de la función en dicho punto; es decir, si y sólo si $-4 + a = 9 - 2b$, lo cual es equivalente a $a + 2b = 13$. La continuidad en $x = -2$, por tanto, no depende del valor de c.

5. Demuestre que la función

$$\frac{\sqrt{x+3} - 2}{\sqrt{x+1} - 1}$$

toma el valor $1/3$ en algún punto $c \in [1, 6]$.

SOLUCIÓN. Sea

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+3} - 2}{\sqrt{x+1} - 1}\,.$$

Esta función es obviamente elemental y existe con seguridad cuando $\sqrt{x+1} > 1$, es decir, para $x > 0$. En particular, existe para los valores de x en $[1, 6]$, que son los que nos interesan. Al ser f una función elemental (obtenida aplicando las operaciones algebraicas y composiciones a las funciones polinómicas y sus inversas, en este caso), se sigue que f es continua en el intervalo cerrado $[1, 6]$. Además, $f(1) = 0 < 1/3$ y $f(6) = \dfrac{1}{\sqrt{7} - 1}$. Es fácil ver que este último valor es $> 1/3$ ya que $\sqrt{7} - 1 < 3$ (cierto porque $\sqrt{7} < 4$).
Por el teorema del valor intermedio de Bolzano, en algún punto $c \in [1, 6]$ se cumple $f(c) = 1/3$.

6. Demuestre que la función

$$2x^2 - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 1/2$$

tiene un cero en cada uno de los intervalos $I_1 = [-1, 0]$ e $I_2 = [0, 1]$.

Solución. La pregunta se reduce al estudio de los ceros de la función

$$f(x) = 2x^2 - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{1}{2}$$

en cada uno de los intervalos indicados. Observemos que f es una función elemental y, por tanto, continua en el intervalo $[-1, 2]$. Puesto que

$$f(-1) = 2 - \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} > 0\,, \qquad f(0) = -\frac{1}{2} < 0\,,$$

el teorema de Bolzano nos garantiza la existencia de un cero de f en el intervalo I_1.
Lo mismo ocurre con I_2 ya que

$$f(0) = -\frac{1}{2} < 0\,, \qquad f(1) = 2 - 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0\,.$$

7. Sean f y g dos funciones continuas en el intervalo $[0, 1]$ que cumplen $f(0) = g(1) = 0$ y $f(1) = g(0) = 1$. (Conviene dibujar un par de gráficas a modo de ejemplo.) Demuéstrese que existe un punto $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = g(c)$.

Solución. Consideremos la diferencia $h(x) = f(x) - g(x)$. Obviamente, $h \in C[0, 1]$. Además,

$$h(0) = f(0) - g(0) = 0 - 1 = -1 < 0 \quad \text{y} \quad h(1) = f(1) - g(1) = 1 - 0 = 1 > 0\,.$$

Por el teorema de Bolzano, existe $c \in (0, 1)$ tal que $h(c) = 0$, es decir, $f(c) - g(c) = 0$.

8. Para $x > 0$, calcule la derivada de la función $f(x) = \sqrt{x}$ por definición.

Solución. Puesto que la función $\sqrt{x}$ está definida $[0, +\infty)$, para $x > 0$ ciertamente está definida en un intervalo abierto alrededor de x, por ejemplo, en $(0, 2x)$. Aplicando la definición y racionalizando el denominador, obtenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})\,(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,.
\end{aligned}$$

Obsérvese que esto concuerda con la regla general $(x^a)' = ax^{a-1}$, $a \in \mathbb{R}$, cuando $x > 0$ y $a = 1/2$.

9. Aplicando el método de inducción matemática, demuestre que la derivada de $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, viene dada por la fórmula $f'(x) = nx^{n-1}$. (Obsérvese que de esta forma somos capaces de comprobar la fórmula más general vista en clase para ciertos valores del exponente.)

Solución. Primero comprobamos la base de la inducción. La fórmula es cierta para $n = 1$ ya que se reduce a $(x)' = 1$, lo cual es fácil de comprobar o bien por definición o bien geométricamente (la tangente a la gráfica de $y = x$ es la misma recta y tiene pendiente 1).
Supongamos ahora que $(x^n)' = nx^{n-1}$ se cumple para cierto $n \in \mathbb{N}$. Hemos de ver que se cumple $(x^{n+1})' = (n+1)x^n$. Esto se sigue fácilmente de la Regla del producto para las derivadas y de la hipótesis inductiva:

$$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = (x^n)' \cdot x + x^n \cdot (x)' = nx^{n-1}x + x^n = (n+1)x^n\,.$$

Esto completa la demostración por inducción.

10. Supongamos que f es una función derivable en un intervalo $(-c, c)$ y que allí cumple la desigualdad $|f(x)| \leq 3|x|$. Demuéstrese que $|f'(0)| \leq 3$.

Solución. Sustituyendo el valor $x = 0$ en la desigualdad, obtenemos $|f(0)| \leq 0$. Como $|f(0)| \geq 0$, se sigue que $f(0) = 0$. Por lo tanto,

$$\left|\frac{f(x) - f(0)}{x}\right| = \frac{|f(x)|}{|x|} \leq 3\,,$$

debido a nuestra condición sobre f. Usando la definición de la derivada en $x = 0$, vemos que

$$|f'(0)| = \left|\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}\right| = \lim_{x\to 0} \left|\frac{f(x) - f(0)}{x}\right| \leq 3\,.$$

Obsérvese que hemos podido intercambiar el límite y el valor absoluto gracias a la continuidad de la función valor absoluto.

11. ¿Para qué valor real del parámetro a es horizontal en el punto $(0, 1)$ la tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3 - ax^2 - (2a^2 + 3)x + 1$?

Solución. La pendiente de la tangente en $x = 0$ debe ser cero: $f'(0) = -(2a^2 + 3) = 0$, pero $2a^2 + 3 \geq 3 > 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$ y, por tanto, la derivada no se puede anular. Luego la tangente no es horizonal en dicho punto para ningún valor del parámetro.

12. Determine en qué puntos $x \in \mathbb{R}$ la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + x & \text{si } x > 0, \\ x - \dfrac{1}{8} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

es derivable.

Solución. Es fácil ver que f es derivable en cualquier punto $x \neq 0$. Por ejemplo, si $a > 0$, en el intervalo $(0, 2a)$ la función f viene representada por la fórmula $\dfrac{x^2}{2} + x$, una función derivable en $x = a$.
Sin embargo, la función f no es continua en $x = 0$ ya que los límites laterales en dicho punto no coinciden:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x - \frac{1}{8} = -\frac{1}{8}\,, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{2} + x = 0\,.$$

Recordemos que la diferenciabilidad implica la continuidad. Por tanto, al ser discontinua en $x = 0$, se deduce inmediatamente que la función f no es diferenciable allí.

13. Halle el dominio y el rango (recorrido o imagen) de la función $f(x) = \sqrt{\ln(x^2+4)}$, estudie si es par o impar y calcule su derivada en los puntos donde exista.

SOLUCIÓN. Se trata de una función *elemental* ya que f es la composición de la raíz, del logaritmo y del polinomio x^2+4.
Determinemos primero el dominio de f. Puesto que $x^2+4 \geq 4 > 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, se sigue que $\ln(x^2+4) > \ln 1 = 0$ para todo x, luego podemos definir la raíz y, por tanto, la función f en todo punto x: $D(f) = \mathbb{R}$.
Hallemos la imagen de f. La función x^2 toma todos los valores no negativos cuando x recorre los reales. Luego x^2+4 toma todos los valores en el intervalo $[4, +\infty)$. Puesto que la función logaritmo es creciente, se sigue que $\ln(x^2+4)$ toma todos los valores en el intervalo $[\ln 4, +\infty)$ y, por tanto, tomando la raíz cuadrada (que también es una función creciente), vemos que f toma todos los valores posibles en el intervalo $[\sqrt{\ln 4}, +\infty)$.
La función es obviamente *par* ya que su dominio, $\mathbb{R}$, es un conjunto simétrico respecto a $x = 0$ y

$$f(-x) = \sqrt{\ln((-x)^2+4)} = \sqrt{\ln(x^2+4)} = f(x)\,.$$

Finalmente, aplicando la Regla de la cadena, calculamos la derivada (para $x \in \mathbb{R}$ arbitrario):

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln(x^2+4)}} \cdot \frac{1}{x^2+4} \cdot 2x = \frac{x}{(x^2+4)\sqrt{\ln(x^2+4)}}\,.$$

14. Sea $f(x) = x + \operatorname{sen}(x/2)$, $x \in \mathbb{R}$.
(a) Demuéstrese que f es biyectiva como función entre los intervalos $(0, \pi)$ y $(0, \pi+1)$.
(b) Sea $g = f^{-1} : (0, \pi+1) \to (0, \pi)$ la función inversa de f. (Obsérvese que no es nada fácil encontrar una fórmula explícita para g.) Calcule el valor de $g'\left(\dfrac{\pi+\sqrt{2}}{2}\right)$.

SOLUCIÓN. (a) Según la Regla de la cadena y la desigualdad $\cos x \geq -1$, tenemos que

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Así pues, f es (estrictamente) creciente en todo $\mathbb{R}$ y, por tanto, inyectiva. Puesto que

$$f(0) = 0\,, \qquad f(\pi) = \pi + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = \pi + 1\,,$$

deducimos que la imagen del intervalo abierto $(0, \pi)$ por f es el intervalo $(0, \pi+1)$.

(b) Notemos ahora que $\frac{\pi}{2} \in (0, \pi)$ y $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi+\sqrt{2}}{2}$. Usando la fórmula para la derivada de la función inversa, se sigue que

$$g'\left(\frac{\pi+\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{1+\frac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{4}{4+\sqrt{2}}\,.$$

15. a) Demuestre que la tangente a la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{6x}{\pi} - 4\operatorname{sen}^2(x)$$

es horizontal en algún punto $c \in (0, \pi/6)$.

b) Compruebe que para ese valor c se cumple la condición $\operatorname{sen}(2c) = 3/(2\pi)$.

SOLUCIÓN. a) Puesto que

$$f(0) = 0\,, \qquad f(\pi/6) = 1 - 4\operatorname{sen}^2(\pi/6) = 1 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0\,,$$

el Teorema de Rolle nos dice que la derivada de f se anula en algún punto $c \in (0, \pi/6)$ o, lo que es lo mismo, que la tangente a la gráfica de f es horizontal en algún punto $c \in (0, \pi/6)$.
Sólo nos queda calcular la derivada e igualarla a cero en el punto c mencionado arriba:

$$f'(x) = \frac{6}{\pi} - 8\operatorname{sen} x \cos x = \frac{6}{\pi} - 4\operatorname{sen}(2x)\,, \qquad f'(c) = \frac{6}{\pi} - 4\operatorname{sen}(2c) = 0\,.$$

De la última igualdad se sigue que $\operatorname{sen}(2c) = 6/(4\pi) = 3/(2\pi)$.

16. Determine el número exacto de ceros (distintos entre sí) de la ecuación $x^5 + 2x^3 + x + 1 = 0$.

SOLUCIÓN. Sea $f(x) = x^5 + 2x^3 + x + 1$. Puesto que

$$f(-1) = -1 - 2 - 1 + 1 = -3 < 0\,, \quad f(0) = 1 > 0\,,$$

el teorema de Bolzano implica que f tiene, al menos, un cero en el intervalo $(-1, 0)$.
Si f tuviera dos ceros distintos, digamos a y b, según el teorema de Rolle su derivada tendría también un cero en el intervalo (a, b). Sin embargo, la derivada es

$$f'(x) = 5x^4 + 6x^2 + 1$$

y, puesto que $x^2 \geq 0$ y $x^4 \geq 0$ para todo número real x, se sigue que $f'(x) \geq 1 > 0$ para todo x, así que la derivada no se anula.
Luego f no puede tener dos ceros diferentes, así que tiene exactamente uno y éste está en el intervalo $(-1, 0)$.

17. Demuestre la desigualdad $|\operatorname{arc\,tg} a - \operatorname{arc\,tg} b| \leq \frac{1}{2}|a - b|$ para a, $b \geq 1$.

SOLUCIÓN. La función $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$ es derivable y, por tanto, continua en todo $\mathbb{R}$, luego podemos aplicar el Teorema de Lagrange del valor medio a f en cualquier intervalo $[a, b]$, para concluir que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) = \frac{1}{c^2 + 1}$$

Puesto que a, $b \geq 1$, se sigue que también $c \geq 1$, luego $c^2 + 1 \geq 2$ y, por tanto,

$$\frac{|\operatorname{arc\,tg} a - \operatorname{arc\,tg} b|}{|a - b|} = \left|\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right| = |f'(c)| = \frac{1}{c^2 + 1} \leq \frac{1}{2}\,,$$

que es lo que se pedía demostrar.

18. Calcule el siguientes límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{arc\,tg} x}\,.$$

SOLUCIÓN. El límite tiene la forma "$\frac{0}{0}$" ya que

$$\operatorname{sen}(\operatorname{tg} 0) = \operatorname{sen} 0 = 0\,, \qquad \operatorname{arc\,tg} 0 = 0\,.$$

Aplicando la regla de L'Hopital (junto con la regla de la cadena), obtenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{arc\,tg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(\operatorname{tg} x)\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{1+x^2}} = \frac{\cos 0 \cdot 1}{1} = 1\,.$$

19. Halle el límite

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{7x^2+13x}{e^{x^2}}\,.$$

SOLUCIÓN. Por las propiedades de los polinomios y de la función exponencial, tanto el numerador como el denominador tienden a $+\infty$ cuando $x \to +\infty$. Por consiguiente, podemos aplicar la Regla de L'Hopital (junto con la Regla de la cadena):

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{7x^2+13x}{e^{x^2}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{14x+13}{2x\,e^{x^2}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{14x+13}{2x}\frac{1}{e^{x^2}} = 7\cdot 0 = 0\,.$$

20. Calcule el siguientes límite:

$$L = \lim_{x\to 0^+} (1+7x)^{1/x}\,.$$

SOLUCIÓN. En primer lugar, conviene observar que $1+7x > 0$ para los valores pequeños de x ya que $\lim_{x\to 0}(1+7x) = 1$, luego existe $\ln(1+7x)$ y es $> \ln 1$ cuando $x > 0$. Por consiguiente, $L \geq 0$ (si existe) y tiene sentido hablar de $\ln L$, entendiendo que $\ln 0 = \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.

Tomando logaritmos y utilizando la continuidad de la función logaritmo, obtenemos

$$\ln L = \ln \lim_{x\to 0^+} (1+7x)^{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \ln\,(1+7x)^{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\,(1+7x)}{x}\,.$$

Una vez más, hemos obtenido un límite de tipo "$\frac{0}{0}$" y podemos aplicar L'Hopital (y la regla de la cadena):

$$\ln L = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\,(1+7x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+7x}\cdot 7}{1} = 7\,.$$

Por consiguiente, $L = e^7$.

21. Determine razonadamente el límite

$$L = \lim_{x\to 0+} (e^x - 1)^x .$$

Solución. Razonando como antes, vemos que tiene sentido hablar de $\ln L$. Usando la continuidad del logaritmo y sus propiedades básicas, vemos que

$$\ln L = \ln \lim_{x\to 0+} (e^x - 1)^x = \lim_{x\to 0+} \ln(e^x - 1)^x = \lim_{x\to 0+} x \ln(e^x - 1) .$$

El siguiente paso es convertir la expresión que figura en el límite en una fracción:

$$\ln L = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(e^x - 1)}{\frac{1}{x}} .$$

Puesto que ahora ya tenemos una forma indeterminada de tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$, podemos aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\ln L = \lim_{x\to 0+} \frac{\dfrac{e^x}{e^x - 1}}{-\dfrac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0+} \frac{x^2 e^x}{e^x - 1} .$$

El último límite puede calcularse de varias maneras. Por ejemplo, podemos aplicar otra vez la regla de L'Hopital para luego cancelar la fracción:

$$\ln L = -\lim_{x\to 0+} \frac{x^2 e^x}{e^x - 1} = -\lim_{x\to 0+} \frac{2x\, e^x + x^2 e^x}{e^x} = -\lim_{x\to 0+} (2x + x^2) = 0 .$$

De $\ln L = 0$ se deduce inmediatamente que $L = 1$.

22. Demuestre la desigualdad $\cos x \geq 1 - x^2$.

Solución. Consideramos la función $f(x) = \cos x - 1 + x^2$ definida en toda la recta real. Vamos a calcular dónde alcanza el mínimo global:

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x + 2x, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 2x = \operatorname{sen} x$$

Esa ecuación tiene la solución obvia $x = 0$, pero queremos ver si puede haber más. Para ello tomamos otra derivada:

$$f''(x) = -\cos x + 2 > 0,$$

por lo tanto $f'(x)$ es siempre creciente y sólo puede tomar el valor cero una vez en $x = 0$. Esto implica que $f(x)$ tiene un único punto crítico en $x = 0$. Como $f''(0) = -1 + 2 = 1 > 0$, f alcanza un mínimo local ahí. Pero

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty,$$

por lo que ese mínimo debe serlo globalmente. Por ello,

$$f(x) = \cos x - 1 + x^2 \geq f(0) = 0,$$

para todo x, lo que implica la desigualdad pedida.

23. Halle los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = x|x - 1|$.

SOLUCIÓN. Usando la definición del valor absoluto, la función f se puede escribir como

$$f(x) = \begin{cases} x(1-x), & x \leq 1 \\ x(x-1), & x \geq 1 \end{cases}$$

Usando límites laterales, es fácil ver que f no es derivable en $a = 1$:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(1+h)h-0}{h} = 1,$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(-1+h)h-0}{h} = -1$$

y por lo tanto $f'(1)$ no puede existir. Esto quiere decir que a la hora de calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f, debemos añadir el punto $x = 1$ a los puntos críticos. Por otra parte,

$$f'(x) = \begin{cases} 1-2x, & x < 1, \\ 2x-1, & x > 1. \end{cases}$$

El único punto donde f' se anula es $x = 1/2$ (observe que $1/2$ se halla en el intervalo $x < 1$, y ahí la derivada es $1 - 2x$). Por lo tanto los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f serán $(-\infty, 1/2)$, $(1/2, 1)$ y $(1, \infty)$. Nos queda sólo comprobar en cuáles de ellos se crece y en cuáles se decrece. Para ello evaluamos f' en un punto de cada intervalo:

- $f'(0) = 1 - 2 \cdot 0 = 1 > 0$, por lo que en $(-\infty, 1/2)$, f crece;
- $f'(3/4) = 1 - 2 \cdot \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$, por lo que en $(1/2, 1)$ se decrece,
- y $f'(2) = 4 - 1 = 3 > 0$, por lo que en el intervalo $(1, \infty)$, f crece.

24. Consideremos la función $f(x) = e^{2x^3-x} + 1$.

(a) Estudie el comportamiento de f en los extremos de su dominio y la existencia de las posibles asíntotas horizontales o verticales.

(b) ¿En qué puntos la función f alcanza sus valores máximo y mínimo?

(c) ¿En qué punto corta al eje X la recta tangente a la gráfica de f en $x = 0$?

SOLUCIÓN. (a) Puesto que $\lim_{x\to+\infty}(2x^3 - x) = +\infty$ y $\lim_{t\to+\infty} e^t = +\infty$, se sigue que $\lim_{x\to+\infty}(e^{2x^3-x} + 1) = +\infty$.
Por otra parte, $\lim_{x\to-\infty}(2x^3 - x) = -\infty$ y $\lim_{t\to-\infty} e^t = 0$, luego $\lim_{x\to-\infty}(e^{2x^3-x} + 1) = 0 + 1 = 1$. Se deduce que la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f en la parte negativa cuando $x \to -\infty$.

(b) Aplicando la Regla de la cadena, calculamos la derivada de nuestra función:

$$f'(x) = (6x^2 - 1)e^{2x^3-x}.$$

Puesto que la función exponencial sólo toma valores positivos, el signo de la derivada de f coincide con el de la función $6x^2 - 1$. Ésta se anula en los puntos $\pm 1/\sqrt{6}$, es negativa en el intervalo $(-1/\sqrt{6}, +1/\sqrt{6})$ y positiva en el resto. Por tanto, alcanza su máximo en $-1/\sqrt{6}$ y su mínimo en $+1/\sqrt{6}$.

(c) Puesto que $f'(0) = (-1) \cdot e^0 = -1$ y $f(0) = 2$, la ecuación de la recta tangente en $x = 0$ es $y - 2 = -x$. La intersección con el eje X se obtiene cuando $y = 0$ y, por tanto, $x = 2$; es decir, en el punto $(2, 0)$.

25. Considere la función

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

(a) Determine para qué valores de x está definida y examine su comportamiento en los extremos del dominio.

(b) Encuentre los puntos de intersección de la gráfica de f con los ejes de las coordenadas.

(c) Halle los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los puntos de máximo y mínimo de la función.

(d) Finalmente, esboce la gráfica de f.

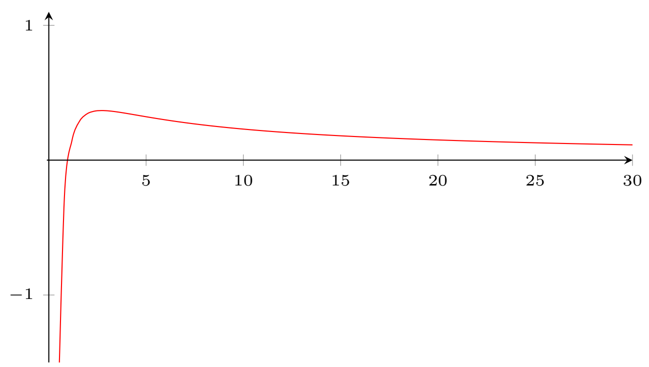
Solución. (a) La función f sólo está definida cuando está definido el logaritmo, así que el dominio es $(0, +\infty)$.
Examinemos el comportamiento en los extremos del dominio y las posibles asíntotas. Cuando $x \to 0^+$, sabemos que $\ln x \to -\infty$; al dividir por x que es pequeño y positivo, vemos que $f(x) \to -\infty$. Eso significa que la recta $x = 0$ (el eje Y) es una asíntota vertical de la gráfica. Por L'Hopital, deducimos inmediatamente que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0\,.$$

Por tanto, la recta $y = 0$ (el eje X) es una asíntota horizontal de la gráfica (para los valores grandes de x).
(b) La única intersección con los ejes de las coordenadas se obtiene cuando $y = 0$, es decir, cuando $\ln x = 0$ y eso sólo es posible para $x = 1$. Cuando $0 < x < 1$, sabemos que $\ln x < 0$ y, por consiguiente, f toma valores negativos (su gráfica está por debajo del eje X), mientras que para $1 < x < +\infty$ la función es positiva (esa parte de la gráfica está por encima del eje X).
(c) La derivada de f, según la regla del cociente, es

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

y, por tanto, es nula sólo para $x = e$, positiva en el intervalo $0 < x < e$ (intervalo de crecimiento de f) y negativa en $(e, +\infty)$ (intervalo de decrecimiento). Se sigue que f alcanza su máximo (global) en $x = e$; dicho máximo es igual a $f(e) = 1/e$.
(d) Con estos datos, es fácil esbozar la gráfica, teniendo en cuenta que pasa por los siguientes puntos: $(1/e, -e)$, $(1, 0)$, $(e, 1/e)$, $(e^2, 2/e^2)$.



Aunque eso no se pide, examinando la segunda derivada, podría verse que f tiene un punto de inflexión (donde cambia de convexidad) entre e y $+\infty$; ese punto se puede calcular explícitamente.

26. Estudie la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 2|x| + 1$. En particular, determine:

- Su dominio y los puntos de continuidad.
- Si es par o impar.
- Los puntos donde f es diferenciable y donde no.
- Los intervalos de crecimiento.
- Los máximos y mínimos locales y globales.
- Dibuje la gráfica de f.

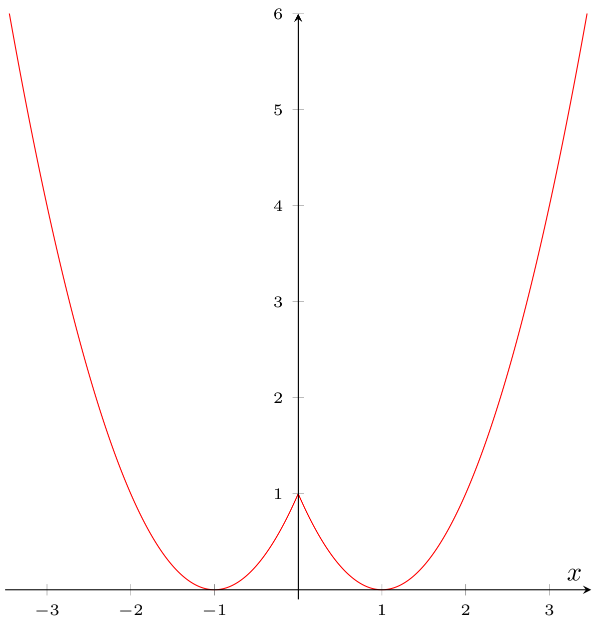
SOLUCIÓN. Recordando que $x^2 = |x|^2$, conviene observar primero que $f(x) = |x|^2 - 2|x| + 1 = (|x| - 1)^2$. Por lo tanto,

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & \text{si } x \geq 0, \\ (-x-1)^2 = (x+1)^2, & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$$

La gráfica de f se obtiene, por tanto, juntando la parte de la parábola $y = (x-1)^2)$ contenida en el semiplano derecho ($x \geq 0$) con la parte de la parábola $y = (x+1)^2$ en el semiplano izquierdo ($x \leq 0$). Así que dicha gráfica es simétrica respecto al eje Y (la función f es obviamente par ya que $|x|$ lo es).

La función es continua en todo $x \neq 0$ y también en $x = 0$ ya que $y = (x-1)^2)$ es continua en $[0, +\infty)$ e $y = (x+1)^2$ lo es en $(-\infty, 0]$ y ambas toman valor 1 en $x = 0$; es decir, los límites laterales existen y son iguales a 1, que es el valor de la función en $x = 0$.

Es inmediato ver que $f(x) \geq 0$ para todo x y que toma el valor 0 sólo cuando $|x| = 1$, es decir, para $x = \pm 1$. Por tanto, en esos dos puntos la función alcanza su mínimo global. Puede verse, o bien analizando el signo de la derivada o nuestro conocimiento de las parábolas cuadráticas, que f decrece en $(-\infty, -1)$, crece en $(-1, 0)$, decrece en $(0, 1)$ y vuelve a crecer en $(1, +\infty)$.



Es importante resaltar que la función no es derivable en el punto $x = 0$ ya que la tangente a la gráfica por la derecha tiene la pendiente -2 (la derivada lateral derecha) mientras que la tangente por la izquierda tiene la pendiente 2. Otra forma de ver esto sería constatando que f es la suma de las funciones $x^2 + 1$ y $-2|x|$, de las cuales la primera es derivable en todo $\mathbb{R}$ y la segunda es derivable en todo $\mathbb{R}$ menos en el punto $x = 0$.