Cálculo I (Grado en Ingeniería Informática)

Problemas resueltos, 2012-13 y 2013-14 (primera parte)

Preparado por los profesores de la asignatura: Pablo Fernández, Dragan Vukotić (coordinadores), Luis Guijarro, Kazaros Kazarian y José Luis Torrea

1. Demuestra que los números $3+\sqrt{7}$ y $\sqrt{3+\sqrt{7}}$ son irracionales.

SOLUCIÓN. En primer lugar, el número $\sqrt{7}$ es irracional. La prueba es completamente análoga a la vista en clase para $\sqrt{2}$; de hecho, se prueba de la misma manera que $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$ para cualquier número primo p. Si fuese $3+\sqrt{7} = q \in \mathbb{Q}$, tendríamos también que $\sqrt{7} = q-3 \in \mathbb{Q}$ (ya que la diferencia de dos números racionales también es racional), lo cual es una contradicción. Por tanto, $3+\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$.
Para ver que $\sqrt{3+\sqrt{7}}$ es irracional, supongamos otra vez lo contrario: $\sqrt{3+\sqrt{7}} = r \in \mathbb{Q}$. Entonces $3+\sqrt{7} = r^2 \in \mathbb{Q}$, lo cual contradice lo dicho anteriormente. Luego $\sqrt{3+\sqrt{7}} \notin \mathbb{Q}$.

2. Hallar todos los valores del parámetro a para los que la ecuación cuadrática (en x)

$$x^2 + (2a+1)x - a^2 + 3a = 0$$

tiene exactamente una solución real.

SOLUCIÓN. Para que la ecuación dada tenga solución real única en x, es necesario y suficiente que su discriminante sea cero:

$$\Delta = (2a+1)^2 - 4(-a^2+3a) = 8a^2 - 8a + 1 = 0\,.$$

Esta nueva ecuación cuadrática (esta vez en a) tiene como soluciones los valores

$$\frac{8 \pm \sqrt{32}}{16} = \frac{8 \pm \sqrt{16 \cdot 2}}{16} = \frac{8 \pm 4\sqrt{2}}{16} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{4}\,.$$

Por tanto, existen exactamente dos valores del parámetro a que se mencionan en el enunciado:

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \text{y} \quad \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\,.$$

3. Halle razonadamente todas las soluciones de la ecuación

$$x^4 - 7x^2 + 12 = 0\,.$$

SOLUCIÓN. Se trata de una *ecuación bicuadrática* ya que, después del cambio de variable $x^2 = t$, ésta se convierte en la siguiente ecuación cuadrática:

$$t^2 - 7t + 12 = 0\,.$$

Resolviendo, obtenemos que las soluciones para t son $t = 3$ y $t = 4$. Finalmente, despejamos la x de $x^2 = t$, obteniendo cuatro soluciones: $x = \pm\sqrt{3}$ y $x = \pm 2$. Las comprobaciones directas en la ecuación inicial muestran que los cuatro valores son en efecto soluciones de la ecuación.

4. Demuestra razonadamente que la desigualdad $x^2 + 5x + 8 > 0$ se cumple para todo x real.

SOLUCIÓN. Solución 1. Una forma de hacerlo es completando el cuadrado, según la fórmula estándar:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 .$$

Tomando $y = 5/2$, observamos que

$$x^2 + 5x + 8 = x^2 + 2\cdot\frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 8 = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 8 = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4} > 0\,,$$

ya que el cuadrado de cualquier número real es no negativo.

Solución 2. Otra manera de hacerlo sería observando que la función $f(x) = x^2 + 5x + 8$ es continua y no tiene ceros reales, luego o es siempre positiva o es siempre negativa (según el teorema de Bolzano); como $f(0) = 8$, se sigue que es siempre positiva.

5. Encuentra razonadamente todos los valores $x \in \mathbb{R}$ para los que se cumple la desigualdad $x^3 \leq 1$.

SOLUCIÓN. (I) Una forma de resolver el ejercicio consiste en ver que la función $f(x) = x^3$ es no decreciente: si $x \leq y$ entonces $x^3 \leq y^3$. Luego, si $x \leq 1$, se sigue que $x^3 \leq 1^3 = 1$; sin embargo, si $x > 1$, entonces $x^3 > 1^3 = 1$. Luego, $x^3 \leq 1$ es cierto sólo si y sólo si $x \leq 1$.

(II) Otra solución consiste en ver que $x^3 \leq 1$ es equivalente a $x^3 - 1 \leq 0$ y recordar la factorización de la diferencia de dos cubos:

$$x^3 - 1 = x^3 - 1^3 = (x-1)(x^2+x+1)\,.$$

El trinomio cuadrático $x^2 + x + 1$ es siempre estrictamente positivo ya que tiene el coeficiente principal positivo y no tiene ceros, pues su discriminante es $\Delta = 1^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = -3 < 0$. Por tanto, el producto de arriba es ≤ 0 si y sólo si el factor $x - 1 \leq 0$, es decir, si y sólo si $x \leq 1$.

6. Encuentra razonadamente todos los valores $x \in \mathbb{R}$ para los que se satisface la siguiente desigualdad: $|x^2 + 2x + 1| \leq 4$.

SOLUCIÓN. Solución 1. Observemos que la expresión dentro del valor absoluto es un cuadrado. Y entonces

$$|x^2+2x+1| \leq 4 \quad\Longleftrightarrow\quad |(x+1)^2| \leq 4 \quad\Longleftrightarrow\quad (x+1)^2 \leq 4 \quad\Longleftrightarrow\quad |x+1| \leq 2,$$

(conviene recordar que $\sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$), que finalmente nos dice que $-2 \leq x+1 \leq 2$, es decir, que $-3 \leq x \leq 1$.

Solución 2. Podemos escribir que

$$|x^2+2x+1| \leq 4 \quad\Longleftrightarrow\quad -4 \leq x^2+2x+1 \leq 4,$$

y calcular los valores de x que verifican, simultáneamente, que $x^2 + 2x - 3 \leq 0$ y que $x^2 + 2x + 5 \geq 0$. La segunda se cumple para todo x, mientras que la primera nos da el rango $x \in [-3, 1]$.

Solución 3. También podemos decidir cuándo x^2+2x+1 es positivo y negativo. Como es siempre positivo,

$$|x^2+2x+1| \leq 4 \quad\Longleftrightarrow\quad x^2+2x+1 \leq 4 \quad\Longleftrightarrow\quad x^2+2x-5 \leq 0,$$

que nos vuelve a dar el rango $x \in [-3, 1]$.

En realidad, las tres estrategias son (casi) lo mismo.

7. Demuestra *por inducción* que, para todo $n \geq 1$, se cumple la identidad

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

Solución. El caso $n = 1$ nos dice que $1 + 3 = (1 + 1)^2$, que es claramente cierto.

Supongamos que, para un n fijo, se cumple que $1+3+5+\cdots+(2n+1) = (n+1)^2$. Ahora consideramos el caso siguiente, es decir, sumamos un impar más. Nos gustaría obtener, para este caso, que

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1) + (2n + 3) = (n + 2)^2.$$

Veámoslo:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1) + (2n + 3) \overset{\text{hip. inducción}}{=} (n + 1)^2 + (2n + 3) = n^2 + 4n + 4 = (n + 2)^2\,.$$

Según el Principio de Inducción, se sigue que

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

para todo n natural.

(Observa que el enunciado nos proporciona una fórmula sencilla y útil para sumar los primeros $n+1$ números impares.)

8. Demuéstrese *por inducción* que, para todo $n \in \mathbb{N}$, el número $N(n) = n^3 + 5n$ es divisible por 6.

Solución. Obviamente, $N(1) = 6$ es divisible entre 6. Supongamos ahora que, para cierto $n \in \mathbb{N}$, el número $N(n)$ es divisible por 6. Veamos que 6 también es un divisor del número $N(n + 1)$. Desarrollando el cubo y agrupando los términos de forma conveniente, obtenemos:

$$\begin{aligned} N(n+1) &= (n+1)^3 + 5(n+1) = (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + 5n + 5 \\ &= (n^3 + 5n) + (3n^2 + 3n) + 6 = N(n) + 3n(n+1) + 6\,. \end{aligned}$$

Obsérvese que n y $n + 1$ son dos números naturales consecutivos y, por tanto, uno de ellos es par, luego el número $n(n + 1)$ es par y, por tanto, $3n(n + 1)$ es divisible por $2 \cdot 3 = 6$. Se sigue que nuestro número $N(n+1)$ es la suma de tres números divisibles entre 6, a saber, $N(n)$ (por hipótesis inductiva), $3n(n+1)$ y 6, luego también es divisible por 6. Esto completa la prueba por inducción.

9. Demuestra *por inducción* que, para todo $n \geq 5$, se cumple la desigualdad

$$2^n > n^2 + 1\,.$$

Solución. La desigualdad se cumple para $n = 5$ ya que $2^5 = 32 > 26 = 5^2 + 1$. Supongamos que es cierta para un $n \geq 5$ y veamos que también lo es para $n + 1$. Por la hipótesis inductiva, obtenemos que

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2(n^2 + 1)\,.$$

Si supiésemos que $2(n^2 + 1) \geq (n + 1)^2 + 1$, la prueba estaría terminada. Observemos que la útima desigualdad es equivalente a $2n^2 + 2 \geq n^2 + 2n + 2$ o, lo que es lo mismo, $n^2 \geq 2n$, lo cual es obviamente cierto ya que $n \geq 5 \geq 2$. Por tanto, $2^{n+1} > (n + 1)^2 + 1$, que es lo que queríamos probar.

10. En combinatoria se define el número $\binom{n}{k} := \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Fijamos un $n_0 \geq 2$ natural; usa inducción empezando en n_0 para demostrar que para todo $n \geq n_0$ se tiene que

$$\binom{n}{n_0} \leq (n_0+1)^n \,.$$

Solución. La desigualdad es verdad para $n = n_0$, ya que $\binom{n_0}{n_0} = 1 \leq (n_0+1)^{n_0}$.
Asumiendo que la desigualdad es cierta para un cierto $n \geq n_0$, vamos a examinarla para $n+1$:

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{n_0} &= \frac{(n+1)!}{n_0!(n+1-n_0)!} = \frac{(n+1)n!}{n_0!(n+1-n_0)(n-n_0)!} \\ &= \frac{n+1}{n+1-n_0} \cdot \frac{n!}{n_0!(n-n_0)!} = \frac{n+1}{n+1-n_0} \cdot \binom{n}{n_0}. \end{aligned}$$

El segundo factor de la derecha es menor o igual que $(n_0+1)^n$ por inducción; necesitamos estimar el primer factor como menor que n_0+1 para obtener el $(n_0+1)^{n+1}$ deseado. Vamos a ver si es verdad:

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{n+1-n_0} \leq n_0+1 \quad &\Leftrightarrow \quad n+1 \leq (n_0+1)(n+1-n_0) \\ &\Leftrightarrow \quad n+1 \leq n+1+n_0(n+1) - n_0^2 - n_0 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leq n_0 n - n_0^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leq n - n_0 \,, \end{aligned}$$

lo cual es cierto por la hipótesis $n \geq n_0$. El enunciado queda probado por inducción.

11. La sucesión (a_n) viene dada por la siguiente fórmula recurrente:

$$a_1 = \frac{1}{2}\,, \qquad a_{n+1} = 2a_n - \frac{1}{4} \quad \text{para cada } n \geq 1.$$

(a) Demuestra *por inducción* que $a_n > \frac{1}{4}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Prueba que la sucesión es creciente.

Solución. (a) Es obvio que $a_1 > 1/4$.
Supongamos que, para un n fijo, resulta que $a_n > 1/4$. El siguiente término de la sucesión, a_{n+1}, viene dado por

$$a_{n+1} = 2a_n - \frac{1}{4},$$

y como $a_n > 1/4$, resulta que

$$a_{n+1} > 2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$

que es lo que queríamos probar.
Según el Principio de Inducción, se sigue que $a_n > 1/4$ para todo n natural.

(b) Queremos probar que $a_{n+1} > a_n$ para todo n. Pero como $a_{n+1} = 2a_n - 1/4$, es lo mismo que exigir que

$$2a_n - \frac{1}{4} > a_n \quad \Longleftrightarrow \quad a_n > \frac{1}{4}\,,$$

que ya sabemos que es cierto, por el apartado anterior.

12. La sucesión $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ viene dada por la fórmula

$$A_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n, \qquad n \geq 0\,.$$

Demostrar que A_n es un número natural para todo $n \geq 0$. ¿De qué sucesión se trata?

Solución. Aplicaremos la inducción "de n y $n+1$ a $n+2$". Primero, es fácil ver que

$$A_0 = \frac{5-\sqrt{5}}{10} + \frac{5+\sqrt{5}}{10} = \frac{10}{10} = 1\,, \quad A_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2} + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1\,.$$

Suponiendo que ambos A_n y A_{n+1} son números naturales para cierto n, veremos que A_{n+2} también es natural, comprobando que verifica la relación $A_{n+2} = A_n + A_{n+1}$. (Obviamente, aquí estamos tratando una situación muy especial que en otros contextos sería más complicada.) En efecto, sumando y agrupando los términos (el primero con el tercero y el segundo con el cuarto en la primera igualdad abajo) vemos que

$$\begin{aligned}
A_n + A_{n+1} &= \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \\
&\quad \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \\
&= \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \\
&= \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\frac{3-\sqrt{5}}{2} + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\frac{3+\sqrt{5}}{2}\,.
\end{aligned}$$

Ahora nos ayuda la siguiente observación:

$$\frac{3\pm\sqrt{5}}{2} = \frac{6\pm 2\sqrt{5}}{4} = \frac{(1\pm\sqrt{5})^2}{4} = \left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^2\,.$$

Por tanto, volviendo a la cadena anterior de igualdades, vemos que

$$\begin{aligned}
A_n + A_{n+1} &= \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} = A_{n+2}\,.
\end{aligned}$$

Vemos, por tanto, que $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ es la célebre sucesión de Fibonacci, ya que $A_0 = A_1 = 1$ y $A_{n+2} = A_n + A_{n+1}$.

13. Definimos la sucesión a_n mediante la fórmula

$$a_{n+1} = n \cdot a_n,$$

donde $a_1 = 1$. Demuestre que para todo $n \geq 4$ se tiene que $a_n \geq n$.

Solución. El problema pide demostrar que $a_n \geq n$ para $n \geq 4$; para hacerlo usando el principio de inducción, habrá que empezar ésta en $n = 4$. Calculando los primeros términos de la sucesión vemos que

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 6.$$

Observamos que $a_4 \geq 4$, lo que da el inicio de la inducción. Asumimos ahora que $a_n \geq n$ y examinamos a_{n+1}:

$$a_{n+1} = n \cdot a_n \geq n \cdot n = n^2,$$

donde hemos usado la hipótesis de inducción para obtener la desigualdad. Como $n \geq 1$, multiplicando por n positivo en ambos lados obtenemos que $n^2 > n$; como n^2 es un entero se debe tener de hecho que $n^2 \geq n+1$. Por lo tanto $a_{n+1} \geq n+1$ que es lo que queríamos demostrar. El enunciado se sigue ahora del principio de inducción.

14. Usar la propiedad de Arquímedes para demostrar que $\inf \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} = 0$.

Solución. Primero vamos a comprobar que si $\varepsilon > 0$ entonces existe un número natural n_ε tal que $\frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$. Esta afirmación es una consecuencia inmediata de la propiedad de Arquímedes, puesto que si tomamos $a = \frac{1}{\varepsilon}$ entonces, según la propiedad de Arquímedes, existe $n_a \in \mathbb{N}$ tal que $a < n_a$. De aquí obtenemos que $\frac{1}{a} > \frac{1}{n_a}$. Por la definición de a tenemos que $\frac{1}{a} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$. Entonces si tomamos $n_\varepsilon = n_a$ obtenemos que $\frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$, que es lo que teníamos que comprobar.
Para demostrar que $\inf \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} = 0$ tenemos que comprobar que $\forall \varepsilon > 0$ existe un número $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$, lo que es cierto según la afirmación demostrada más arriba.

15. Sea A el conjunto de números reales definido como

$$A = \left\{ 2 + n, 2 + \frac{1}{n} \; : \; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Halle (si existen) su supremo y su ínfimo, y decida si A tiene un máximo o un mínimo.

Solución. Como n puede tomar cualquier valor entero positivo, los valores $2 + n$ crecen tanto como se desee; esto quiere decir que A no admite ninguna cota superior y por tanto no existe el supremo ni el máximo de A.
Por otra parte, como n es siempre positivo n y $1/n$ también lo son, lo que implica que

$$2 + n \geq 2, \quad 2 + \frac{1}{n} \geq 2$$

y por tanto A tiene a 2 como una cota inferior. Como $1/n$ puede tomar valores tan pequeños como se quiera, se tiene que no hay ningún otro $\alpha > 2$ que pueda funcionar como cota inferior; de hecho, si $\alpha > 2$, $\alpha - 2 > 0$ y existe algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha - 2 > \frac{1}{n} > 0$ y $\alpha > 2 + \frac{1}{n}$. Por ello, 2 es de hecho el ínfimo de A.
Finalmente, para que 2 fuera el mínimo de A, 2 debería pertenecer a A. Pero si algún elemento de éste fuera 2, entonces tendríamos que para algún $n \in \mathbb{N}$, $n = 0$ ó $1/n = 0$, lo que es imposible porque n es positivo.

16. Calcula el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^4 - 2n^3 + 41}{\pi n^4 + en^2 + \sqrt{2}n},$$

Solución. Dado que estamos considerando el cociente de dos polinomios del mismo grado, podemos usar el truco habitual de dividir el numerador y el denominador por la potencia más grande de n que aparece en el denominador, que es n^4, obteniendo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^4 - 2n^3 + 41}{\pi n^4 + en^2 + \sqrt{2}n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - \frac{2}{n} + \frac{41}{n^4}}{\pi + \frac{e}{n^2} + \frac{\sqrt{2}}{n^3}} = \frac{3}{\pi}.$$

17. Calcula el límite

$$\lim_{n\to\infty} \left(n^2 \sqrt{n^2+3n} - n^3\right),$$

Solución. Se trata de una indeterminación de tipo $\infty - \infty$, con lo cual no podemos calcular el límite directamente. Usamos el procedimiento habitual de racionalizar (o de multiplicar por la expresión conjugada), basado en la fórmula estándar $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, como sigue:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \left(n^2 \sqrt{n^2+3n} - n^3\right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(n^2 \sqrt{n^2+3n} - n^3\right)\left(n^2 \sqrt{n^2+3n} + n^3\right)}{n^2 \sqrt{n^2+3n} + n^3} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^4\,(n^2+3n) - n^6}{n^2 \sqrt{n^2+3n} + n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^5}{n^2 \sqrt{n^2+3n} + n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{\sqrt{1+3/n}+1}\end{aligned}$$

(en el último paso hemos dividido arriba y abajo por n^3, pues el denominador es comparable con n^3). Escrito así, es inmediato comprobar que el límite es $+\infty$.

18. Calcúlese el límite

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1}).$$

Solución. Una vez más, racionalizando el numerador, obtenemos

$$L = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+n+1) - (n^2+1)}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2+1}}.$$

Dividiendo por n en el numerador y en el denominador, vemos que

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{2}.$$

19. Calcula razonadamente el valor del límite $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n}$.

SOLUCIÓN. Para este ejercicio, es fundamental recordar el límite básico

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\,.$$

El término general de la sucesión, $a_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{2n}$, cumple

$$\frac{1}{a_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = \left((1+\frac{1}{n})^n\right)^2 \to e^2\,, \quad n\to\infty\,.$$

Por tanto, $a_n \to \dfrac{1}{e^2}$, $n\to\infty$.

20. Calcula razonadamente el siguiente límite: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}$.

SOLUCIÓN. Conviene recordar que si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ entonces también $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1} = L$. En particular,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = e\,.$$

Ahora ya resulta fácil calcular el límite dado, usando unas sencillas manipulaciones:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n-1)+1}{n-1}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = e\,.$$

21. Decidir si la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}e^{n+2}}{\pi^n}$$

converge o diverge. Si procede, calcular la suma de la serie.

SOLUCIÓN. Observemos que nuestra serie es geométrica con razón $q=-e/\pi$, ya que el cociente de cada dos términos sucesivos es

$$\frac{\dfrac{(-1)^{n+2}e^{n+3}}{\pi^{n+1}}}{\dfrac{(-1)^{n+1}e^{n+2}}{\pi^n}} = -\frac{e}{\pi}\,.$$

Además,

$$\left|-\frac{e}{\pi}\right| = \frac{e}{\pi} < \frac{e}{3} < 1\,,$$

con lo cual la serie converge. Según la fórmula para la suma de una serie geométrica:

$$a+aq+aq^2+aq^3+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}\,, \qquad |q|<1\,,$$

la suma en este caso ($a=e^2$, $q=-e/\pi$) es

$$\frac{e^2}{1+\dfrac{e}{\pi}} = \frac{\pi e^2}{\pi+e}\,.$$

22. (a) Decide si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$$

converge o diverge. Justifica tu respuesta.

(b) Decide razonadamente si converge o no la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)\,\log(n+1)}\,.$$

SOLUCIÓN. (a) Observemos que $\dfrac{1}{n(n+2)}$ se puede descomponer en **fracciones simples** como sigue:

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(n+2)-n}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right).$$

Esto nos permite ver que nuestra serie tiene sumas parciales *telescópicas* (la mayoría de los términos aparecen dos veces, la segunda vez tres lugares después de la primera aparición y con el signo opuesto):

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\Bigg((1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{6})++(\frac{1}{5}-\frac{1}{7})\\
&\quad +\ldots+(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n})+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1})+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})\Bigg)\\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) \to \frac{3}{2}, \quad n\to\infty\,.
\end{aligned}$$

Por consiguiente, la serie converge y su suma es igual a $3/2$.

(b) Puesto que para todo $n \geq 2$ se cumple que $\log(n+1) \geq \log 3 > \log e = 1$, se sigue que

$$0 < \frac{1}{n(n+2)\,\log(n+1)} \leq \frac{1}{n(n+2)}\,, \qquad n\geq 2\,.$$

El apartado (a) y el criterio de comparación nos dicen que la serie converge.

23. Estudiar la convergencia de la serie infinita

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1}\,,$$

justificando la respuesta.

SOLUCIÓN. Podemos aplicar el *Criterio del término general*: la serie diverge porque su término general no tiende a 0. De hecho,

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1}$$

no existe: la sucesión es oscilante ya que $\frac{n^2}{n^2+1}$ converge a 1, mientras que $(-1)^n$ alterna su valor entre 1 y -1.

24. Estudia la convergencia de la serie infinita

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n! + \sqrt{3}} .$$

SOLUCIÓN. Conviene observar que

$$n! + \sqrt{3} > n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \geq (n-1)n$$

y, por tanto,

$$0 < \frac{1}{n!+1} < \frac{1}{(n-1)n} , \qquad n \geq 2 .$$

La serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n}$ se ha visto en clase en algunos grupos: es *telescópica* y convergente, con suma uno.
Alternativamente, puede verse que es convergente aplicando el *Criterio asintótico* ya que

$$\frac{1}{(n-1)n} \sim \frac{1}{n^2} , \qquad n \to \infty .$$

(Esta última afirmación se comprueba dividiendo los términos y viendo que el cociente, $n/(n-1) \to 1$, cuando $n \to \infty$.)
Finalmente, aplicando el *Criterio de comparación*, concluimos que la serie inicial converge.

25. Decide si la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n+2}$$

converge o diverge, justificando adecuadamente la respuesta.

SOLUCIÓN. Observa que es una serie de términos positivos. El término general de la serie,

$$a_n = \tfrac{\sqrt{n}+1}{n+2} \to 0 , \qquad n \to \infty ,$$

como es necesario para la (hipotética) convergencia (pero no es suficiente). Además, es asintóticamente equivalente a $1/\sqrt{n}$, como se comprueba fácilmente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}+1}{n+2}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)}{n+2} = 1.$$

Aplicando el *Criterio asintótico* y recordando que $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (siendo ésta una serie p-armónica con $p = 1/2 < 1$), deducimos que la serie del enunciado también diverge.

26. Decide razonadamente si la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+n+3}$$

converge o diverge.

SOLUCIÓN. Argumentamos como en el caso de la serie anterior, pero ahora la comparación (asintótica) correcta es con $1/n^{3/2}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\sqrt{n}}{n^2+n+3}}{\dfrac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}\,n^{1/2}}{n^2+n+3} = 1.$$

Aplicando el *Criterio asintótico* y recordando que $\sum_n \frac{1}{n^{3/2}}$ converge, deducimos que la serie del enunciado también converge.

27. Estudia razonadamente la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{n+2}}{2^n(\log n)^n}$.

SOLUCIÓN. El término general contiene varias potencias. Podemos aplicar el *Criterio de la raíz*:

$$\sqrt[n]{\frac{e^{n+2}}{2^n(\log n)^n}} = \frac{e^{\frac{n+2}{n}}}{2\log n} = \frac{e^{1+\frac{2}{n}}}{2\log n} \to 0\,, \qquad n\to\infty\,,$$

puesto que el numerador tiende a e y el denominador tiende al infinito. Puesto que el límite es menor que uno, la serie converge.

28. Decide razonadamente si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n\cdot(n!)^2}{(2n)!}$$

converge o diverge. Nombra o enuncia el criterio utilizado.

SOLUCIÓN. La serie es positiva, siendo su término general $a_n = \dfrac{7^n\cdot(n!)^2}{(2n)!}$. Puesto que aparecen factoriales, es conveniente aplicar el test del cociente.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{7^{n+1}\cdot((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}}{\dfrac{(2n)!}{7^n\cdot(n!)^2}} = \frac{\dfrac{7^{n+1}\cdot((n+1)\cdot n!)^2}{(2n+2)!}}{\dfrac{(2n)!}{7^n\cdot(n!)^2}} = \frac{7(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \to \frac{7}{4}\,, \quad n\to\infty\,.$$

Al ser el límite mayor que uno, la serie diverge según el *Criterio del cociente*.

29. Decide la convergencia condicional o absoluta (o, en su caso, la divergencia) de la serie infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n!+2n)}{n^3}\,.$$

SOLUCIÓN. La serie asociada con valores absolutos converge por el *Criterio de comparación* ya que

$$0 \le \left|\frac{\operatorname{sen}(n!+2n)}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^3}$$

y la serie 3-armónica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ converge (visto en clase). Por tanto, la serie original converge absolutamente.

30. Determínese si la serie infinita
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+2013}}$$
diverge, converge absolutamente o converge condicionalmente, justificando la respuesta.

SOLUCIÓN. Se trata de una serie alternada. No converge absolutamente porque
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+2013}}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2013}}$$
diverge, por comparación asintótica con la serie $\sum_n 1/\sqrt{n}$ (que ya sabemos que diverge).
Por otra parte, es fácil comprobar que $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+2013}}$ es una sucesión decreciente de números positivos y tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, justo las hipótesis con las que el *criterio de Leibniz* nos permite concluir que la serie converge.
Conclusión: la serie en el enunciado converge condicionalmente.

31. Decide la convergencia condicional o absoluta (o, en su caso, la divergencia) de la serie infinita
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n-1}}\,.$$

SOLUCIÓN. La serie es alternada. Es evidente que la sucesión $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n-1}}\right)_{n=2}^{\infty}$ es positiva y tiende a cero.
Además, cuando n crece, también crece $n-1$ y es positiva ($n \geq 2$), luego $\frac{1}{n-1}$ es decreciente y también la sucesión $\frac{1}{\sqrt[4]{n-1}}$. Por el *criterio de Leibniz*, la serie es convergente.
La serie asociada con los valores absolutos, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n-1}}$, puede compararse con la serie $\frac{1}{4}$-armónica:
$$\frac{1}{n-1} \geq \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{n-1}} \geq \frac{1}{\sqrt[4]{n}} = \frac{1}{n^{1/4}}\,.$$
Recordemos que $\sum_n \frac{1}{n^{1/4}}$ diverge por ser $1/4 \leq 1$.
Aplicando el *Criterio de comparación*, se sigue que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n-1}}$ diverge.
En conclusión, la serie inicial converge condicionalmente.

32. Demostrar que si $a_n > 0$, entonces la serie $\sum_n \left(\frac{2a_n}{3a_n+2}\right)^n$ converge.

SOLUCIÓN. Es fácil ver que
$$\frac{2a_n}{3a_n+2} \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow 6a_n \leq 6a_n + 4\,,$$
lo cual es cierto. Por tanto, la serie se puede comparar con la geométrica $\sum_n \left(\frac{2}{3}\right)^n$ y ésta converge por ser su razón $q = 2/3 \in (-1,1)$.