Resúmenes de Cálculo I

Fernando Chamizo

Diciembre 2010

Índice

---

1. Números naturales, racionales y reales

El principio de inducción. Es un método para demostrar propiedades que involucran números naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Probar una propiedad $\mathcal{P}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ requiere, según el principio de inducción, comprobar dos cosas:

1) $\mathcal{P}_1$ se cumple.
2) Suponiendo que $\mathcal{P}_n$ se cumple, entonces también se cumple $\mathcal{P}_{n+1}$.

Dos variantes comunes consisten en sustituir la primera propiedad por que $\mathcal{P}_{n_0}$ se cumpla para cierto n_0, entonces $\mathcal{P}_n$ quedará demostrado para $n \geq n_0$. También en la segunda propiedad se supone a veces que $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$, $\dots$ y $\mathcal{P}_n$ se cumplen (inducción completa).

Ejemplo: Demostrar que $1+2+3+\cdots+n = n(n+1)/2$.

Llamemos a esta propiedad $\mathcal{P}_n$. Claramente $\mathcal{P}_1$ se cumple porque $1 = 1(1{+}1)/2$. Suponiendo $\mathcal{P}_n$, es decir, la igualdad de partida, sumando en ambos miembros $n+1$ se obtiene

$$\begin{aligned} 1+2+3+\cdots+n &= n(n+1)/2+n+1 \\ &= (n+1)(n/2+1) \\ &= (n+1)(n+2)/2 \end{aligned}$$

que es la propiedad para $n+1$.

Desigualdades y valor absoluto. Las desigualdades entre números reales se conservan si en ambos miembros se suma o se resta un mismo número real o si se multiplican o dividen por un número real positivo pero cambian de sentido si se multiplican o dividen por un número real negativo.

Ejemplo: Decidir para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se cumple $(6x-9)/(x+2) \le 1$.

Quitar el denominador requiere distinguir dos casos:

a) $x+2>0$ entonces $6x-9 \le x+2 \Leftrightarrow 5x \le 11 \Leftrightarrow x \le 11/5$.

b) $x+2<0$ entonces $6x-9 \ge x+2 \Leftrightarrow 5x \ge 11 \Leftrightarrow x \ge 11/5$. Entonces o bien $x>-2$ y $x \le 11/5$, lo cual se cumple para $x \in (-2, 11/5]$, o bien $x<-2$ y $x \ge 11/5$ que claramente es imposible.

El *valor absoluto* es un número x, denotado con $|x|$, es x si $x \ge 0$ y $-x$ si $x<0$. Es decir, es el número desprovisto de su signo.

Ejemplo: Estudiar para qué valores de x se verifica $|2x+5|>1$.

Como antes distinguimos $2x+5 \ge 0$ en cuyo caso $2x+5>1$ o equivalentemente $x>-2$, y $2x+5<0$ que análogamente lleva a $-3>x$. Entonces $x \in (-\infty,-3)\cup(-2,\infty)$.

Cotas inferiores y superiores. Ínfimos y supremos. Dado un conjunto $\mathcal{A}$ de números reales se dice que M es una *cota superior* de $\mathcal{A}$ si $x \le M$ para todo $x \in \mathcal{A}$. De la misma forma se dice que m es una *cota inferior* si $m \le x$ para todo $x \in \mathcal{A}$.

Si un conjunto admite una cota superior y una cota inferior se dice que está *acotado*. Si sólo admite una de ellas se dice que está *acotado superiormente* o *acotado inferiormente*, respectivamente.

Para un conjunto de números reales acotado superiormente siempre existe una cota superior mínima llamada *supremo*. De la misma forma, si está acotado inferiormente siempre existe una cota inferior máxima llamada *ínfimo*.

El ínfimo y el supremo de un conjunto $\mathcal{A}$ se suele denotar con $\inf \mathcal{A}$ y $\sup \mathcal{A}$, respectivamente. No siempre pertenecen al conjunto y cuando esto ocurre a veces se les llama mínimo y máximo.

Ejemplo: Sea el conjunto $\mathcal{A} = \big\{(-1)^n n + \frac{1}{n} + n + 1 \ : \ n \in \mathbb{N}\big\}$. Estudiar si está acotado inferior y superiormente y en su caso hallar el ínfimo y el supremo.

Los elementos con n par son de la forma $n + \frac{1}{n} + n + 1 = 2n + 1 + \frac{1}{n}$ y los elementos con n impar son $-n + \frac{1}{n} + n + 1 = 1 + \frac{1}{n}$. Los primeros pueden ser arbitrariamente grandes tomando n grande entonces $\mathcal{A}$ no está acotado superiormente. Por otro lado, en ambos casos los elementos son claramente mayores que 1, entonces $\mathcal{A}$ está acotado inferiormente y 1 es una cota inferior. De hecho es el ínfimo porque para cualquier otro número $c > 1$ la desigualdad $1 + \frac{1}{n} > c$ no se cumpliría para n par suficientemente grande.

2. Sucesiones y series

Tipos de sucesiones. Intuitivamente una *sucesión* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una lista (conjunto ordenado) infinita de números reales a_1, a_2, a_3, a_4, ... Más rigurosamente una sucesión es una forma de asignar a cada $n \in \mathbb{N}$ un número real a_n, el *término general* de la sucesión.

No siempre el término general tiene una fórmula explícita. Por ejemplo, $a_1 = 1$, $a_n = 3a_{n-1} - 1$ define una sucesión por recurrencia (un elemento de la sucesión en términos de los anteriores).

Se dice que una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es

- *creciente* si $a_{n+1} \ge a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
- *decreciente* si $a_{n+1} \le a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
- *monótona* si es creciente o decreciente.
- *acotada* (inferior o superiormente) si el conjunto formado por los a_n lo está.

Ejemplo: Consideremos las sucesiones cuyos términos generales son $a_n = (n+1)/n$ y $b_n = 20n - n^2$. La primera es decreciente ($a_n = 1 + 1/n$), en particular monótona. Está acotada superiormente por $a_1 = 2$ e inferiormente por 1. La segunda no es monótona porque por ejemplo $a_1 = 19 < a_2 = 36$ y $a_{18} = 36 > a_{19} = 19$.

El concepto de límite. Se dice que $l \in \mathbb{R}$ es el límite de una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, y se escribe $\lim a_n = l$ ó $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ si para cualquier $\epsilon > 0$, por pequeño que sea, a partir de cierto n se cumple $|a_n - l| < \epsilon$.

Intuitivamente el límite es el valor al que se acerca a_n según crece n. No todas las sucesiones tienen límite. A las que sí lo tienen se les llama *convergentes* y a las que no lo tienen *divergentes* aunque unos pocos autores reservan este nombre para las sucesiones tales que a partir de cierto n, $|a_n|$ es mayor que cualquier cantidad prefijada de antemano. Este último hecho se suele denotar con $\lim a_n = \infty$ a veces especificando el signo, pero eso no quiere decir que exista el límite (∞ no es un número real), es sólo una notación para indicar una forma especial de la no existencia del límite.

Ejemplo: La sucesión definida por $a_n = (n+1)/n$ es convergente. Podríamos conseguir $|(n+1)/n - 1| < 10^{-3}$ tomando $n > 1000$ y en general $|(n+1)/n - 1| < \epsilon$ tomando $n > \epsilon^{-1}$.

Ejemplo: La sucesión definida por $a_n = 3 - n^2$ no es convergente porque $|a_n|$ crece indefinidamente, es decir $\lim a_n = \infty$.

Ejemplo: La sucesión definida por $a_n = 2 + (-1)^n$ tiene como elementos 1, 3, 1, 3, 1, 3,... y por tanto no es convergente (no está siempre cerca a partir de cierto n ni de 1 ni de 3, va oscilando). Esta sucesión no es monótona ni convergente pero sí acotada.

El cálculo de límites. La base teórica para el cálculo de límites es un resultado que asegura que si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones convergentes entonces

$$\lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n, \qquad \lim(a_n b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n, \qquad \lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$$

donde para la última propiedad se necesita $\lim b_n \neq 0$ (y $b_n \neq 0$ si se quiere que todos los a_n/b_n tengan sentido.

Hay una especie de "álgebra del infinito" fácil de intuir: $\infty \pm k = \infty$, $\infty \cdot k = \infty$ si $k \neq 0$ y $k/\infty = 0$. Aquí ∞, k y 0 significan sucesiones que tienden a estos valores. De la última se deduce también $k/0 = \infty$. Pero hay otras "operaciones" que no tienen un valor definido, dependen del ejemplo concreto. Se las suele llamar *indeterminaciones* y las ligadas a las operaciones elementales son

$$+\infty - \infty, \qquad 0 \cdot \infty, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad \frac{0}{0}.$$

Hay otras indeterminaciones ligadas a las potencias: 1^{∞}, ∞^0 y 0^0.

El procedimiento habitual para calcular límites es hacer manipulaciones algebraicas que eliminen las indeterminaciones.

Ejemplo:

$$\lim \frac{\sqrt{n^2+3}+n}{3n+1} = \lim \frac{\frac{\sqrt{n^2+3}}{n}+1}{3+\frac{1}{n}} = \lim \frac{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}+1}{3+\frac{1}{n}} = \frac{1+1}{3} = \frac{2}{3}$$

Dividir entre n permite quitar los infinitos y la indeterminación ∞/∞ desparece.

$$\lim\left(\sqrt{n^2+1}-n\right) = \lim \frac{\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{\sqrt{n^2+1}+n} = \lim \frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n} = 0$$

Se racionaliza y así la ausencia de raíces elimina la indeterminación $+\infty - \infty$.

Dos teoremas sobre límites. Dos de los resultados teóricos más relevantes sobre sucesiones convergentes son los siguientes:

Teorema del sandwich: Si a partir de cierto n se cumple $a_n \le b_n \le c_n$ y $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones convergentes con $\lim a_n = \lim c_n = l$ entonces $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ también es convergente y su límite es l.

Idea: La sucesión b_n queda "emparedada" entre a_n y c_n si ellas se acercan a un mismo número, b_n también.

Teorema de Bolzano-Weierstrass (versión débil): Cualquier sucesión monótona y acotada es convergente.

Idea: Si una sucesión por ejemplo crece y no sobrepasa un cierto valor, entonces se debe acercar a algún número entre a_1 y ese valor.

Se puede probar (pero no es demasiado fácil) que $a_n = \big(1 + 1/n\big)^n$ define una sucesión monótona creciente y acotada por 3. El teorema anterior asegura que tiene límite. A éste se le llama *número e* y es aproximadamente 2,71828.

Ejemplo: Justificar que la sucesión $\sqrt{2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$,... es convergente y hallar su límite.

Por inducción se prueba que $a_n \le 2$ ($a_1 \le 2$ y, usando $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$, $a_n \le 2 \Rightarrow a_{n+1} \le 2$). Es monótona creciente porque

$$a_{n+1} \ge a_n \;\Leftrightarrow\; \sqrt{2+a_n} \ge a_n \;\Leftrightarrow\; 2 + a_n \ge a_n^2 \;\Leftrightarrow\; 0 \ge (a_n+1)(a_n-2)$$

y sabemos que $0 \le a_n \le 2$, por tanto la última desigualdad se cumple. El teorema de Bolzano-Weierstrass asegura que existe $l = \lim a_n$. Por la definición de límite también $l = \lim a_{n+1}$ y tomando entonces límites en la relación $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ se sigue $l = \sqrt{2+l}$. Resolviendo la ecuación $l = 2$.

Series. Una *serie* no es más que una sucesión de la forma

$$a_1,\ a_1+a_2,\ a_1+a_2+a_3,\ a_1+a_2+a_3+a_4,\dots$$

que se suele denotar con $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y a cuyos elementos $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ se les llama *sumas parciales*. La convergencia o no de una serie es la de sus sumas parciales. Si una serie converge a l a veces se escribe $l = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Las sumas parciales no suelen admitir fórmulas explícitas, por ello hay varios criterios para decidir la convergencia a partir de los a_n.

Criterio del cociente: Supongamos que $a_n > 0$ y que existe $l = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$

- Si $l < 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
- Si $l > 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no converge.

Obs.: Si $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$ entonces tampoco converge. El caso $l = 1$ es indeterminado.

Criterio de la raíz: Supongamos que $a_n \geq 0$ y que existe $l = \lim a_n^{1/n}$

- Si $l < 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
- Si $l > 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no converge.

Obs.: Si $\lim a_n^{1/n} = \infty$ entonces tampoco converge. El caso $l = 1$ es indeterminado.

Ejemplo: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$ converge usando cualquier de los dos criterios anteriores porque

$$\lim \frac{2^{-(n+1)}}{2^{-n}} = \frac{1}{2} < 1 \qquad \text{y} \qquad \lim \left(2^{-n}\right)^{1/n} = \frac{1}{2} < 1.$$

Criterio de condensación: Supongamos que $a_n \geq 0$ y que a partir de cierto n, la sucesión a_n es decreciente, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ converge.}$$

Ejemplo: Las series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ donde $\alpha > 0$ por el criterio anterior llevan a $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(1-\alpha)}$ que por el criterio de la raíz o del cociente converge si y sólo si $\alpha > 1$.

Criterio de comparación: Supongamos que $a_n \geq 0$ y $b_n \geq 0$, entonces

- Si a partir de cierto n, $a_n \leq K b_n$ con K constante, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
- Si a partir de cierto n, $b_n \leq K a_n$ con K constante, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ no converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no converge.

Obs.: Nótese que $a_n \leq K b_n$ se cumple si $\exists \lim \frac{a_n}{b_n}$ y que $b_n \leq K a_n$ se cumple si $\exists \lim \frac{b_n}{a_n}$. En conclusión en el caso particular en que $\exists \lim \frac{a_n}{b_n} \neq 0$ se tiene $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

Ejemplo: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 5n + 20)^{-1}$ converge porque $\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$ para $a_n = (n^2 - 5n + 20)^{-1}$ y $b_n = n^{-2}$ y sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ converge.

Es fácil ver que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ que converge necesariamente cumple $\lim a_n = 0$. Más allá de esta propiedad sencilla sólo veremos dos criterios para decir si una serie con términos positivos y negativos converge.

Convergencia absoluta: Si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge. Se dice que *converge absolutamente*.

Criterio de Leibniz: Si $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ cumple $\lim a_n = 0$ y además a_n es monótona entonces la serie converge.

Cuando una serie converge con pero no absolutamente se dice que *converge condicionalmente*.

Ejemplo: La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n$ converge por el criterio de Leibniz pero no converge absolutamente ya que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ no converge. Entonces la serie inicial converge condicionalmente. Por otro lado $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n^2$ converge absolutamente.

3. Funciones continuas y sus propiedades

Repaso de funciones. Una *función* real f es una manera de asignar a cada número x de un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ otro número real $f(x) \in \mathbb{R}$. Normalmente se escribe $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ o $f : A \longrightarrow B$ si se quiere especificar donde están los resultados.

Al conjunto A se le llama *dominio* de f y al conjunto $\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \ : \ x \in A\}$ se le llama *imagen* de f.

Ejemplo: La función $f(x) = 21 + |x - 1|$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cumple $\mathrm{Im}(f) = [21, +\infty)$.

Se dice que una función $f : A \longrightarrow B$ es:

- *inyectiva* si $f(x) = f(y)$ únicamente cuando $x = y$.
- *sobreyectiva* (o *suprayectiva*) si $\mathrm{Im}(f) = B$.
- *biyectiva* si es inyectiva y sobreyectiva.

En general no se puede decidir de qué tipo es una función sin especificar dónde está definida. Por ejemplo, $f(x) = x^2$ no es ni inyectiva ni sobreyectiva cuando se considera como función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ porque $f(1) = f(-1)$ y $-1 \notin \mathrm{Im}(f)$. Sin embargo es biyectiva considerada como función $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$.

Componer dos funciones $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ consiste en sustituir la primera en la segunda. Es decir, la *composición* de g y f es $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$.

Una función $f : A \longrightarrow B$ es biyectiva si y sólo si existe una función $f^{-1} : B \longrightarrow A$, llamada *función inversa* de f, tal que $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ para $x \in A$ y $(f \circ f^{-1})(x) = x$ para $x \in B$.

En la práctica la fórmula para f^{-1} se obtiene despejando la y en $x = f(y)$.

Ejemplo: Sabiendo que la función $f : (0, +\infty) \longrightarrow (1, +\infty)$ dada por $f(x) = (x + 1)/x$ es biyectiva, hallar su función inversa.

Despejando en $(y + 1)/y = x$ se tiene $1 + 1/y = x$ y de aquí $y = 1/(x - 1)$ por tanto $f^{-1}(x) = 1/(x - 1)$.

Límites. Para una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se puede definir $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ exactamente igual que para sucesiones, es decir, el límite es l si por pequeño que sea $\epsilon > 0$ para x mayor que cierto valor se cumple $|f(x) - l| < \epsilon$. Simétricamente se define $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ donde ahora se exige que x sea negativo. Cuando no hay duda en el signo se escribe $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

De la misma forma se define $\lim_{x\to a} f(x)$ como el valor al que se acerca $f(x)$ cuando x se acerca a a y es distinto de él. En términos matemáticos, $l = \lim_{x\to a} f(x)$ cuando para todo $\epsilon > 0$ cualquier $x \neq a$ suficientemente cercano a a cumple $|f(x) - l| < \epsilon$.

Finalmente, se consideran también los *límites laterales* $\lim_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim_{x\to a^+} f(x)$ que consiste en restringirse en la definición de límite a $x < a$ y a $x > a$, respectivamente.

El límite $\lim_{x\to a} f(x)$ existe si y sólo si los limites laterales existen y coinciden.

Ejemplo: Las funciones $f(x) = x/|x|$ y $g(x) = 1/\big(1 + e^{1/x}\big)$, definidas fuera de $x = 0$, verifican $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0^-} g(x) = 1$ y $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$. Por tanto no existen $\lim_{x\to 0} f(x)$ ni $\lim_{x\to 0} g(x)$.

Como en el caso de los límites de sucesiones, los límites de funciones respetan las operaciones elementales (excluyendo la división por cero). Todo lo dicho con respecto a las indeterminaciones se aplica aquí.

Dos límites del tipo $0/0$ que permiten calcular límites más complicados son:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \quad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

Nótese que el segundo es el límite del número e tomando logaritmos tras el cambio $n \leftrightarrow 1/x$.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)}{x+2x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)}{\frac{x}{x^2+1}} \frac{\frac{x}{x^2+1}}{x+2x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{x^2+1}}{x+2x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(1+2x^2)(x^2+1)} = 1.$$

Continuidad. Se dice que una función f es *continua* en a si verifica

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

En particular esto requiere que la función esté definida en el punto y que el límite exista. Por las propiedades de los límites las operaciones elementales (excluyendo la división por cero) respetan la continuidad.

La idea intuitiva es que la gráfica de f no esté "rota" en a. Cuando no se especifica el punto, al decir que una función es continua se sobreentiende que lo es en todos los puntos de su dominio.

Las funciones elementales, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, e^x, $\log(1+x)$, etc. son continuas. Si f es continua en a y g es continua en $f(a)$ entonces $g \circ f$ es continua en a.

Ejemplo: Estudiar si las funciones

$$f(x) = \begin{cases} \big(1+e^{1/x}\big)^{-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1/2 & \text{si } x = 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad h(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

son continuas.

La primera, fuera de cero es una combinación de funciones y operaciones elementales y por tanto continua. En cero ya habíamos visto que los límites laterales no coinciden, por consiguiente no es continua. De la misma forma, en g sólo examinamos $x = 0$. Por la izquierda $\lim_{x\to 0^-} g(x) = 0$, por una variante del teorema del sandwich, ya que $|g(x)| \le |x|$ para $x < 0$. Por la derecha $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$, entonces existe $\lim_{x\to 0} g(x)$ y coincide con $g(0) = 0$, por tanto g es continua. Finalmente, para h en $x = 0$ la función pasa de ser $-x$ (a la izquierda) a x (a la derecha) pero como sus límites coinciden y $h(0) = 0$, no hay problema. En $x = 2$ el límite existe y es 2 pero es distinto de $h(2) = 4$ y se tiene que h no es continua.

Aparte de las propiedades generales ya indicadas hay tres teoremas que se aplican a cualquier función continua definida en un intervalo cerrado $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

T1 (de Bolzano o de los valores intermedios). Si $f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signo entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

T2 (de acotación). La función f está acotada, es decir, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \le M$.

T3 (de Weierstrass). La función f alcanza un máximo y un mínimo, es decir, existen x_m y x_M en $[a, b]$ tales que $f(x_m) \le f(x) \le f(x_M)$ para todo $x \in [a, b]$.

Nótese que los dos últimos resultados afirman que $\mathrm{Im}(f)$ es un conjunto acotado cuyo supremo e ínfimo pertenecen al conjunto.

A pesar de que estos teoremas tienen interés primordialmente teórico, el primero se relaciona con un método iterativo para buscar soluciones de ecuaciones. Si $f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signo entonces o bien hay un cambio de signo en $f(a)$, $f\big(\frac{a+b}{2}\big)$ o bien lo hay en $f\big(\frac{a+b}{2}\big)$, $f(b)$. Por tanto, según el teorema, podemos buscar una solución de la ecuación $f(x) = 0$ en alguno de estos dos intervalos, que son la mitad de pequeños. Iterando el procedimiento se llega a intervalos arbitrariamente pequeños que dan lugar a una aproximación de la solución tan precisa como deseemos. Este esquema se denomina *método de la bisección*.

Ejemplo: Utilizar el método de la bisección para calcular con dos cifras decimales correctas la solución de $\operatorname{sen} x = e^{-x}$ en $[0, 1]$.

Los cálculos correspondientes a llevar a cabo 10 iteraciones para $f(x) = \operatorname{sen} x - e^{-x}$ son:

$[a,\ b]$	$\xrightarrow{f}$	$[f(a),\ f(b)]$
$[0.0,\ 1.0]$	$\longrightarrow$	$[-1.00000,\ 0.47359]$
$[0.5,\ 1.0]$	$\longrightarrow$	$[-0.12711,\ 0.47359]$
$[0.5,\ 0.75]$	$\longrightarrow$	$[-0.12711,\ 0.20927]$
$[0.5,\ 0.625]$	$\longrightarrow$	$[-0.12711,\ 0.04984]$
$[0.5625,\ 0.625]$	$\longrightarrow$	$[-0.03648,\ 0.04984]$

$[0.5625,\ 0.59375]$	$\longrightarrow$	$[-0.03648,\ 0.00722]$
$[0.578125,\ 0.59375]$	$\longrightarrow$	$[-0.01449,\ 0.00722]$
$[0.5859375,\ 0.59375]$	$\longrightarrow$	$[-0.00360,\ 0.00722]$
$[0.5859375,\ 0.58984375]$	$\longrightarrow$	$[-0.00360,\ 0.00182]$
$[0.587890625,\ 0.58984375]$	$\longrightarrow$	$[-0.00089,\ 0.00182]$

Por tanto la solución es $0.58\dots$ y de hecho pertenece al intervalo $[0.587890625, 0.58984375]$.

4. La derivada y sus propiedades básicas

Definición de derivada y su interpretación física y geométrica. La recta secante a la gráfica de una función f que pasa por los puntos con $\big(a, f(a)\big)$ y $\big(b, f(b)\big)$ tiene pendiente $\big(f(b) - f(a)\big)/(b-a)$ (incremento de y entre incremento de x). Por otro lado en Física la velocidad media en un intervalo de tiempo $[a, b]$ viene dada por $\big(s(b) - s(a)\big)/(b-a)$ donde $s = s(t)$ es el espacio.

Si escribimos $b = a + h$ en el límite cuando $h \to 0$ la secante se transformará en tangente y la velocidad media en velocidad instantánea. Esto sugiere definir el objeto matemático:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Si este límite existe se dice que la función f es *derivable* en a y que $f'(a)$ es su *derivada* en a.

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = a$ es $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ y la velocidad instantánea en $t = a$ de una partícula bajo la ley de movimiento $s = s(t)$ es $s'(a)$.

<u>Ejemplo</u>: Calcular la derivada de $f(x) = x^2$ en $x = 3$ y hallar la recta tangente a su gráfica en ese punto.

Por la definición de derivada:

$$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{6h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(6+h) = 6.$$

Por tanto la recta tangente es $y = 6(x-3) + 9$, esto es, $y = 6x - 9$.

Cuando la función f' que asigna a cada x la derivada de f en x se deriva de nuevo se obtiene la llamada *derivada segunda* que se denota con f''. También se definen análogamente derivadas de orden superior: terceras, cuartas, quintas... que se denotan con f''', $f^{(4)}$, $f^{(5)}$... (a veces se usan números romanos para las de orden bajo).

La notación de Leibniz, empleada ampliamente en Física, representa la derivada mediante el símbolo $\dfrac{df}{dx}$ donde x es la variable de la función f, mientras que $\dfrac{d^n f}{dx^n}$ indica una derivada n-ésima. La ventaja de la notación de Leibniz es que recuerda al límite que define la derivada y da intuición sobre algunas fórmulas pero, además de aparatosa, es un poco deficiente para distinguir la derivada como función y el resultado de sustituir esa función en un punto.

No todas las funciones son derivables. Si una función no es continua entonces tampoco puede ser derivable porque entonces el límite del numerador en la definición de derivada no daría cero. Por otra parte hay funciones que son continuas y no derivables.

<u>Ejemplo</u>: La función $f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$ pero no es derivable ya que el límite que definiría $f'(0)$ es $\lim_{h\to 0} |h|/h$ que no existe porque los límites laterales no coinciden.

Derivación de operaciones y funciones elementales La derivada actúa sobre funciones elementales y se comporta bajo las operaciones elementales como se indica en las siguientes tablas. Por otro lado, la regla de la cadena permite derivar unas funciones sustituidas en otras.

$f(x)$		$f'(x)$
K	$\longrightarrow$	0
x^α	$\longrightarrow$	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	$\longrightarrow$	e^x
$\log x$	$\longrightarrow$	$1/x$
$\operatorname{sen} x$	$\longrightarrow$	$\cos x$
$\cos x$	$\longrightarrow$	$-\operatorname{sen} x$

Suma:	$(f+g)' = f' + g'$
Resta:	$(f-g)' = f' - g'$
Multiplicación:	$(fg)' = f'g + fg'$
División:	$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

Regla de la cadena: $(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x)$

Aplicando la regla de la cadena a $f\big(f^{-1}(x)\big) = x$ se tiene que la derivada de la función inversa f^{-1} en x viene dada por $1/f'\big(f^{-1}(x)\big)$

Ejemplo: Se define la función $g(x) = \operatorname{arcsen} x$ (en muchas calculadoras $\sin^{-1}$) como la función inversa de sen en ciertos rangos. Su derivada es entonces $g'(x) = 1/\cos(\operatorname{arcsen} x)$ porque cos es la derivada de sen. Utilizando la fórmula $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ esto se puede escribir también como $g'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$.

Ejemplo: La siguiente función es una composición de sen y de otra función dada por una suma y un cociente. Se deriva sen y después se multiplica por la derivada de lo de dentro.

$$f(x) = \operatorname{sen}\big(x + \frac{\cos x}{x}\big) \ \Rightarrow\ f'(x) = \cos\big(x + \frac{\cos x}{x}\big) \cdot \big(1 + \frac{-x\operatorname{sen} x - \cos x}{x^2}\big)$$

Ejemplo: La función $f(x) = 2^x$ se puede escribir como $f(x) = e^{x\log 2}$ (porque $2 = e^{\log 2}$ al ser exponencial y logaritmo funciones inversas una de otra). Hay que derivar la exponencial y multiplicar por la derivada de $x\log 2$ que es $\log 2$ porque $\log 2 = 0{,}6931\dots$ es una constante. El resultado es entonces $f'(x) = e^{x\log 2}\log 2$.

Ejemplo: Procediendo como antes, la función $f(x) = x^x$ es $f(x) = e^{x\log x}$ y se tiene la composición de una exponencial con un producto que contiene un logaritmo. Entonces $f'(x) = e^{x\log x}(\log x + 1)$.

Ejemplo: La siguiente función es un cociente de un producto y una suma. En la suma hay una composición de sen y un cuadrado.

$$f(x) = \frac{x\log x}{e^x + \operatorname{sen}^2 x} \ \Rightarrow\ f'(x) = \frac{(\log x + 1)\big(e^x + \operatorname{sen}^2 x\big) - (x\log x)\big(e^x + 2\operatorname{sen} x\cos x\big)}{\big(e^x + \operatorname{sen}^2 x\big)^2}.$$

5. Teoremas sobre derivación

El teorema de la función inversa. En la práctica es difícil que exista una expresión explícita para la función inversa y ello hace que no sea fácil un tratamiento directo de las propiedades de las funciones inversas. Esperamos que una función derivable y biyectiva tenga una función inversa derivable, excluyendo algunos casos más o menos obvios. El teorema de la función inversa afirma que éste es el caso.

Teorema (de la función inversa). Sea f derivable en un intervalo abierto I y tal que f' no se anula en dicho intervalo, entonces $f : I \longrightarrow J$ es biyectiva (donde J es el intervalo imagen de I) y la función inversa $f^{-1} : J \longrightarrow I$ es derivable y cumple $\big(f^{-1}\big)'(x) = 1/f'\big(f^{-1}(x)\big)$ para todo $x \in J$.

Ejemplo: Comprobar que existe $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable tal que $\big(g(x)\big)^5 + g(x) + x = 0$ y hallar $g'(0)$.

Definiendo $f(x) = -x^5 - x$ se tiene $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y f' no se anula, por tanto existe $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable y $g = f^{-1}$ verifica $f\big(g(x)\big) = x$, que equivale a la ecuación buscada. De $f(0) = 0$ se deduce $g(0) = 0$ y $g'(0) = 1/f\big(g'(0)\big) = 1/f'(0) = -1$.

Teoremas del valor medio. El teorema del valor medio por antonomasia es el siguiente resultado:

Teorema (del valor medio de Lagrange). Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Interpretando f como la función que da el espacio en función del tiempo, intuitivamente lo que afirma es que si al viajar entre dos puntos la velocidad media es v entonces en algún punto intermedio se alcanza justamente la velocidad v.

Una variante de este resultado que se emplea al probar la regla de L'Hôpital es:

Teorema (del valor medio de Cauchy). Sean $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b), entonces existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\big(f(b) - f(a)\big)g'(c) = \big(g(b) - g(a)\big)f'(c).$$

La fórmula se puede reescribir como un cociente de las fórmulas del teorema del valor medio de Lagrange para f y g en el mismo punto (aunque no se suele hacer así para no excluir los casos con derivadas nulas). La interpretación mecánica sería ahora que si el cociente de dos velocidades medias es r entonces en algún punto el cociente de las velocidades instantáneas es también r.

Estos dos teoremas son consecuencias de uno mucho más simple:

Teorema (de Rolle). Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) tal que $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a,b)$ con $f'(c) = 0$.

Geométricamente, lo que dice es que en una gráfica que une dos puntos de la misma altura siempre hay un punto donde la tangente es horizontal.

Los teoremas del valor medio de Lagrange y de Cauchy se deducen aplicando el teorema de Rolle a las funciones $F(x) = f(x)(b-a) - \big(f(b) - f(a)\big)(x-a)$ y $F(x) = \big(f(b) - f(a)\big)\big(g(x) - g(a)\big) - \big(g(b) - g(a)\big)\big(f(x) - f(a)\big)$, respectivamente.

El teorema de Rolle asegura que no se puede alcanzar un mismo valor dos veces si la derivada no se anula. Este hecho en combinación con el teorema de Bolzano permite localizar soluciones de ecuaciones.

Ejemplo: Hallar el número de soluciones de la ecuación $2x = 1 + \operatorname{sen} x$.

Considerando $f(x) = 2x - 1 - \operatorname{sen} x$ se tiene que f' no se anula y por tanto $f(x) = 0$ no puede tener dos soluciones (llamándolas a y b, contradirían el teorema de Rolle). Por otra parte $f(0) < 0 < f(1)$ implica gracias al teorema de Bolzano que hay una solución en $[0,1]$.

Polinomios y series de Taylor. Desde el punto de vista práctica y también para ciertas resultados teóricos es interesante aproximar funciones complicadas por otras más sencillas.

Si f tiene n derivadas en a se define su *polinomio de Taylor* de orden n en a como

$$T_{n,a}(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Los polinomios de Taylor dan aproximaciones polinómicas de funciones con derivadas sucesivas que son óptimas localmente en cierto sentido.

Teorema (de Taylor). Sea f una función tal que existe su derivada $n+1$-ésima en $[a,x]$ (o en $[x,a]$), entonces

$$f(x) = T_{n,a}(x) + R_{n,a}(x) \qquad \text{con } R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

para algún $c \in (a,x)$ (ó $c \in (x,a)$).

A $R_{n,a}(x)$ se le llama término de error o *resto de Taylor*. En principio es imposible hallarlo directamente por la indeterminación que hay en c pero la fórmula permite hacer estimaciones.

Ejemplo: Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x) = \sqrt{x}$ en 16 y estimar el error cometido al usarlo para aproximar $\sqrt{16.2}$.

Las derivadas de f son $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$, $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$ y $f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-5/2}$. Entonces

$$T_{2,16}(x) = 4 + \frac{1}{8}(x-16) - \frac{1}{512}(x-16)^2 \qquad \text{y} \qquad R_{2,16}(x) = \frac{1}{16c^{5/2}}(x-16)^3.$$

Por tanto al aproximar $\sqrt{16.2}$ por $T_{2,16}(16.2)$ el error es menor que $0.2^3/16^{7/2} = 10^{-3}/2048$, que difiere en menos de $5 \cdot 10^{-9}$ del error real.

Para funciones que tienen un número de derivadas arbitrariamente grande, se puede considerar la serie

$$f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

obtenida al hacer tender n a ∞ en $T_{n,a}$. Tal serie se llama *serie de Taylor* (si no se indica lo contrario se suele tomar $a = 0$). Cuando el error tiende a cero esta serie converge a la función. Con este significado se tienen las expresiones

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad \text{si } x \in \mathbb{R}, \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad \text{si } x \in \mathbb{R}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad \text{si } x \in \mathbb{R}, \quad \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad \text{si } |x| \le 1$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad \text{si } x \in (-1, 1].$$

Ejemplo: Comprobar para qué valores de x converge la serie de Taylor en cero de $\operatorname{sen} x$.

La serie de Taylor es en este caso $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n-1}/(2n-1)!$. Quitando los signos esto es $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con $a_n = |x|^{2n-1}/(2n-1)!$. Suponiendo $x \neq 0$ (para $x = 0$ la convergencia es trivial) se tiene $\lim a_{n+1}/a_n = \lim |x|/(2n+1) = 0$ que implica la convergencia por el criterio del cociente. Así pues, la serie de Tayor de $\operatorname{sen} x$ es absolutamente convergente para todo $x \in \mathbb{R}$.

Las series de Taylor se pueden sumar, multiplicar y componer formalmente agrupando términos del mismo grado. Esto permite calcular algunos polinomios y series de Taylor sin necesidad del cálculo de derivadas de orden superior. Por ejemplo, como para $f(x) = e^x$ se tiene $T_{n,0}(x) = 1 + x/1! + \dots + x^n/n!$ entonces para $f(x) = x^k e^x$ se tendrá $T_{n,0}(x) = x^k + x^{k+1}/1! + \dots + x^{n+k}/n!$. También, como la serie de Taylor de $\operatorname{sen} x$ es $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n-1}/(2n-1)!$, la de $\operatorname{sen}(x^2)$ será $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{4n-2}/(2n-1)!$.

6. Aplicaciones de la derivada

Cálculo de límites. La aplicación de las derivadas más conocida para el cálculo de límites es la *regla de L'Hôpital* que se puede enunciar en varias versiones. Definiendo $\mathbb{R}^+ = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ se sintetizan en que si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ ó $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$ con $a \in \mathbb{R}^+$ y además $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R}^+$, entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Sólo es aplicable a indeterminaciones $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$ pero algunas otras se transforman en éstas.

Ejemplo: Calcular el valor de $L = \lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$.
Tomando logaritmos y aplicando la regla de L'Hôpital

$$\log L = \lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{2x\cos x} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x},$$

donde se ha usado que $\cos x \to 1$ cuando $x \to 0$. Aplicando de nuevo la regla de L'Hôpital o dando este límite por conocido se sigue $\log L = -1/2$ y por tanto $L = e^{-1/2}$.

A menudo es conveniente utilizar aproximaciones de Taylor en lugar de la regla de L'Hôpital.
Ejemplo: Calcular $L = \lim_{x\to 0}(2\cos x - 2 + x^2)/x^4$.
Sabemos que $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + R_{4,0}(x)$ con $R_{4,0}(x)/x^4 \to 0$ (porque $R_{4,0}(x)$ es una derivada multiplicada por x^5). Entonces

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - 2 + x^2}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{2\big(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\big) - 2 + x^2}{x^4} = \frac{1}{12}.$$

Crecimiento y decrecimiento. Se dice que una función f es *creciente* en un intervalo I si para todo $x, y \in I$ con $x \geq y$ se tiene $f(x) \geq f(y)$. Bajo las mismas hipótesis se dice que es *decreciente* en I si $f(x) \leq f(y)$.

Supongamos que f es derivable en un intervalo I. Por el teorema del valor medio $f(x) - f(y) = (x-y)f'(c)$ y se deduce que f es creciente en I si y sólo si $f' \geq 0$ en I y que es decreciente en I si y sólo si $f' \leq 0$ en I.

Una función f se dice que alcanza un *máximo local* (o *relativo*) en a si para cierto $\epsilon > 0$ se cumple que $f(a) \geq f(x)$ para todo $x \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$. Análogamente se dice que alcanza un *mínimo local* (o *relativo*) en a si con la misma notación $f(a) \leq f(x)$. En cada caso, se dice que el máximo o el mínimo local es $f(a)$.

Para referirse simultáneamente a máximos y a mínimos se suele emplear la expresión *extremos*.

Una función derivable que alcanza un extremo local en a debe cumplir necesariamente $f'(a) = 0$. Si la función pasa de ser creciente a ser decreciente en a entonces se alcanza un máximo local y si pasa de ser decreciente a ser creciente, se alcanza un mínimo local.

La existencia de extremos locales no asegura que existan extremos globales (valores máximo y mínimo de la función).

Ejemplo: Hallar los extremos locales de $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$ y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Al derivar e igualar a cero debemos resolver $6x^2 - 30x + 36 = 0$ cuyas soluciones son $x = 2$ y $x = 3$. En estos puntos se alcanzan posibles extremos locales. De $f'(x) = 6(x-2)(x-3)$ se obtiene $f'(x) \le 0$ en $I_1 = [2,3]$ y $f'(x) \ge 0$ en $I_2 = (-\infty, 2]$ y $I_3 = [3, \infty)$. Entonces la función es creciente en I_1 y en I_3 y decrecimente en I_2 y en $x = 2$ se alcanza un máximo local que es $f(2) = 29$ mientras que en $x = 3$ se alcanza un mínimo local que es $f(3) = 28$. Sin embargo no hay extremos globales porque $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Cuando f'' es positiva en un intervalo entonces f' es creciente en dicho intervalo y la recta tangente tiene mayor pendiente. Geométricamente esto se traduce en que la gráfica de f está curvada hacia abajo (como un valle) y se dice que es *convexa*. Análogamente cuando f'' es negativa, la gráfica de f está curvada hacia arriba (como un bombín) y se dice que es *cóncava*. Si en un punto se cambia de cóncava a convexa o viceversa, se dice que es *punto de inflexión*.

Desafortunadamente no hay acuerdo en la terminología de cóncava y convexa y en algunos textos estos nombres están intercambiados.

Representación gráfica. Dada una función f el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ determinado por los puntos de la forma $\big(x, f(x)\big)$ es su *gráfica*. Antes de dibujar una gráfica hay que determinar los valores de x para los que $f(x)$ está definido (el *dominio* de la función). Otra información que suele ser relevante para dar un esbozo cualitativo de la gráfica es:

1. Simetrías $f(x) = f(-x)$ (simetría par) o $f(x) = -f(-x)$ (simetría impar).
2. Cortes con los ejes.

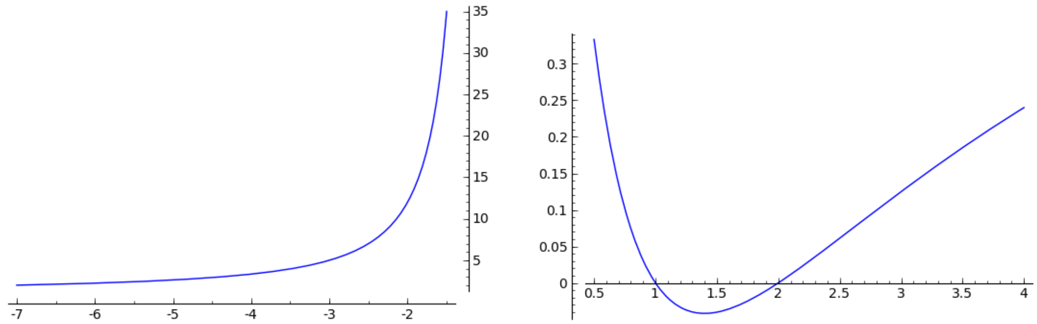
   Con el eje X: $(x_j, 0)$ donde $f(x_j) = 0$. Con el eje Y: $\big(0, f(0)\big)$.
3. Asíntotas.

   Horizontales: $y = \lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ (cuando el límite es finito). Verticales: $x = a_j$ con $\lim_{x\to a_j} f(x) = \infty$.
4. Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos locales.
5. Intervalos de concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.

<u>Ejemplo</u>: Representar la gafica de $f(x) = (x^2 - 3x + 2)/(x+1)^2$.

La función está definida para todo $x \ne -1$. No tiene simetrías. Resolviendo la ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$ se llega a los cortes con el eje X $(2,0)$ y $(1,0)$, mientras que el corte con el eje Y es $(0,2)$. Hay una asíntota horizontal en $y = 1$ (porque $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$) y otra vertical en $x = -1$ (porque $\lim_{x\to-1} f(x) = +\infty$).

La derivada es $f'(x) = (5x-7)/(x+1)^3$ por tanto la función es creciente en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $[7/5, +\infty)$, y es decreciente en $(-1, 7/5)$. Se alcanza un mínimo local en $x = 7/5$, que es $f(7/5) = -1/24$, y no hay más extremos locales. La derivada segunda es $f''(x) = (26 - 10x)/(x+1)^4$ de donde f es cóncava en $[13/5, +\infty)$ y convexa en $(-\infty, -1)$ y $(1, 13/5]$. En $x = 13/5$ se alcanza un punto de inflexión, $(13/5, 2/27)$.



Estos dibujos con ordenador muestran limitaciones para dar una idea global debido a que diferentes elementos de la gráfica viven a diferentes escalas que no se pueden representar al tiempo. En el segundo se ve el mínimo pero si usáramos la misma escala que en el primero sería invisible. La asíntota $y = 1$ no se ve por la derecha por este mismo problema con las escalas.

Método de Newton. Supongamos que $x = x_0$ es una aproximación de la solución de $f(x) = 0$. Hallemos la recta tangente en $\big(x_0, f(x_0)\big)$ a la gráfica de f y digamos que interseca al eje X en $x = x_1$. Si x_1 también está cerca de la solución geométricamente parece claro que al iterar este procedimiento se obtendrán aproximaciones más precisas. Esta técnica para aproximar soluciones se llama *método de Newton* y en la práctica es muy poderosa.

La ecuación de la recta tangente en $\big(x_n, f(x_n)\big)$ es $y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$ y su intersección con $y = 0$ (el eje X) da lugar a la siguiente fórmula para el método de Newton:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Ejemplo: La ecuación cúbica $x^3 - 7x + 7 = 0$ tiene una solución en el intervalo $[1, 1.5]$ por el teorema de Bolzano. Eligiendo en el método de Newton el valor inicial $x_0 = 1.25$ se obtiene

n	x_n	$f(x_n)$
0	1.25	0.203125
1	1.33783783784	0.0296107831718
2	1.35599761482	0.00132955513831
3	1.35689365533	$3.26686452823 \cdot 10^{-6}$

7. La integral y técnicas de integración

La integral y el teorema fundamental del cálculo. La integral de una función acotada en $[a, b]$ es intuitivamente el área limitada por su gráfica y el eje X entendiendo que el área es negativa si está por debajo del eje. Ésta no es una definición matemáticamente válida porque supone el concepto de área. Las *sumas superiores* son las sumas de la áreas de rectángulos por encima de la gráfica con base en el eje X. Análogamente las *sumas inferiores* corresponden a rectángulos por debajo de la gráfica. Se dice que una función f acotada en $[a,b]$ es *integrable* si el ínfimo de las sumas superiores coincide con el supremos de las sumas inferiores. A esta cantidad se la llama *integral* (o *integral definida*) de f en $[a,b]$ y se denota con $\int_a^b f$ o $\int_a^b f(x)\,dx$.

Se puede probar que todas las funciones continuas son integrables. Algunas de las propiedades de la integral son

1) $\lambda,\mu\in\mathbb{R}\Rightarrow\int_a^b(\lambda f+\mu g)=\lambda\int_a^b f+\mu\int_a^b g$, 2) $f\le g\Rightarrow\int_a^b f\le\int_a^b g$, 3) $a<c<b\Rightarrow\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$.

El teorema fundamental del cálculo y la regla de Barrow indican que integrar es en cierto modo lo contrario que derivar.

Teorema (fundamental del cálculo). Si f es continua en $[a,b]$ entonces $F(x)=\int_a^x f$ verifica $F'(c)=f(c)$ para $a<c<b$.

Corolario (Regla de Barrow). Si f es continua en $[a,b]$ y $f=g'$ para alguna función g, entonces $\int_a^b f=g(b)-g(a)$.

<u>Ejemplo</u>: La función $g(x)=x^3/3$ cumple $g'(x)=x^2$, entonces $\int_a^b x^2\,dx=(b^3-a^3)/3$.

Dada una función f, las funciones que cumplen $g'=f$ se llaman *primitivas* (o *antiderivadas*) de f. Todas ellas difieren en una constante. Normalmente se emplea el símbolo de la *integral indefinida* $\int f$ para indicar todas las primitivas. Según la tabla de derivadas

$$\int 0\,dx=K,\qquad \int x^{-1}\,dx=\log|x|+K,\qquad \int x^\alpha\,dx=\tfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+K\quad(\alpha\ne-1),$$

$$\int e^x\,dx=e^x+K,\qquad \int \operatorname{sen}x\,dx=-\cos x+K,\qquad \int\cos x\,dx=\operatorname{sen}x+K,$$

donde K denota una constante arbitraria.

Integración por partes. Por la fórmula para la derivada de un producto $uv'=(uv)'-vu'$. Integrando se obtiene $\int uv'=uv-\int vu'$. Habitualmente se suele despejar formalmente en la notación de Leibniz $u'=du/dx$ y $v'=dv/dx$ para escribir la fórmula anterior como

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du.$$

Ests técnica es útil cuando se tiene un producto de una función que se simplifica al derivar por otra que no se complica al integrar.

<u>Ejemplo</u>: Para calcular $\int_0^1 x^2e^x\,dx$ se debe tomar $u=x^2$, $dv=e^x\,dx$ que corresponde a $du=2x\,dx$ y $v=e^x$. La función u al derivar dos veces se reduce a una constante y por tanto la fórmula de integración por partes aplicada dos veces permite obtener la integral indefinida.

$$\int x^2e^x\,dx=x^2e^x-2\int xe^x\,dx=x^2e^x-2\big(xe^x-\int e^x\,dx\big)=(x^2-2x+2)e^x+K.$$

Por tanto $\int_0^1 x^2e^x\,dx=(x^2-2x+2)e^x\big|_0^1=e-2$.

En productos de exponenciales y senos o cosenos la integración por partes establece una ecuación para la integral a partir de la cual se puede despejar.

Integración por cambio de variable. La fórmula $\int h'\big(g(x)\big)\ g'(x)dx = h\big(g(x)\big) + K$ se sigue inmediatamente de la regla de la cadena. Tomando en lugar de h una primitiva suya, f, se tiene que $\int f\big(g(x)\big)\ g'(x)dx$ es igual que $\int f(t)\ dt$ sustituyendo $t = g(x)$ en el resultado. Aquí también se emplea a menudo formalmente la notación de Leibniz diciendo que el cambio de variable $t = g(x)$ implica $dt = g'(x)\ dx$ (o se despeja dx en función de dt) y de aquí $\int f\big(g(x)\big)\ g'(x)dx = \int f(t)\ dt$. No hay que olvidar deshacer el cambio en el resultado para tener una función de x. Para integrales definidas esta integración por cambio de variable se reduce a la fórmula

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)\ g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\ dt.$$

Ejemplo: Calcular $I = \int_0^4 e^{\sqrt{x}}\ dx$. Si uno quiere aplicar directamente la fórmula anterior con $g(x) = \sqrt{x}$ se podría escribir $e^{\sqrt{x}} = f(\sqrt{x})(2\sqrt{x})^{-1}$ con $f(x) = 2xe^x$. Entonces $I = \int_0^2 2xe^x\ dx$ que integrando por partes es $2(x-1)e^x\big|_0^2 = 2e^2+2$. Sin embargo es más natural razonar diciendo que aplicamos el cambio $x = t^2$ para quitar la raíz cuadrada del exponente, de aquí $dx = 2t\ dt$. Por consiguiente la integral indefinida es

$$\int e^{\sqrt{x}}\ dx = \int 2te^t\ dt = 2(t-1)e^t + K = 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + K.$$

Sustituyendo los límites se obtiene de nuevo $I = 2e^2 + 2$.

Integración de funciones racionales. Se dice que f es una función racional si es cociente de polinomios, $f(x) = P(x)/Q(x)$. Si el grado de P es mayor o igual que el de Q lo primero que se hace es hallar el cociente $C(x)$ y el resto $R(x)$ al dividir estos polinomios. La relación $P = QC + R$ conduce a

$$\int \frac{P}{Q} = \int C + \int \frac{R}{Q}.$$

Entonces basta considerar el caso en que el numerador tiene grado menor que el denominador. También se puede suponer que Q es mónico (coeficiente principal uno) sacando factor común.

Por ejemplo

$$\int \frac{8x^3-2x+3}{4x^2-1}\ dx = \int \big(2x + \frac{3}{4x^2-1}\big)\ dx = x^2 + \frac{1}{4}\int \frac{3}{x^2-1/4}\ dx.$$

Si Q tiene todas sus raíces reales se factoriza como $(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots(x-\alpha_n)^{k_n}$ y P/Q (con Q de grado mayor) admite una descomposición en *fracciones simples*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \Big(\frac{A_{11}}{x-\alpha_1} + \frac{A_{12}}{(x-\alpha_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}}\Big) + \cdots + \Big(\frac{A_{n1}}{x-\alpha_n} + \cdots + \frac{A_{nk_n}}{(x-\alpha_n)^{k_n}}\Big).$$

Los A_{ij} se calculan operando e igualando los coeficientes de los numeradores de ambos miembros. La sustitución $x=\alpha_j$ permiten encontrar los coeficientes si no hay raíces múltiples.

En el caso anterior

$$\frac{3}{x^2-1/4}=\frac{A}{x-1/2}+\frac{B}{x+1/2}\ \Rightarrow\ 3=A(x+1/2)+B(x-1/2).$$

Con $x=1/2$ se obtiene $A=3$ y con $x=-1/2$, $B=-3$. En definitiva

$$\int\frac{8x^3-2x+3}{4x^2-1}\,dx=x^2+\frac{1}{4}\int\Big(\frac{3}{x-1/2}-\frac{3}{x+1/2}\Big)\,dx=x^2+\frac{3}{4}\log|x-\frac{1}{2}|-\frac{3}{4}\log|x+\frac{1}{2}|+K.$$

El método es general si se permiten números complejos. Pero esto no es lo habitual y entonces en Q es posible que aparezcan factores x^2+ax+b con raíces complejas. Si estos factores no están repetidos basta añadir sumandos $(Mx+N)/(x^2+ax+b)$ a la descomposición en fracciones simples. Completando cuadrados y cambiando la variables todo se reduce al caso $a=0$, $b=1$ cuya integral es $\frac{M}{2}\log(x^2+1)+N\operatorname{arc\,tg}x+K$.

Por ejemplo

$$\int\frac{2x+1}{x^2+2x+5}\,dx=\int\frac{2x+1}{(x+1)^2+4}\,dx=\frac{1}{4}\int\frac{2x+1}{\big((x+1)/2\big)^2+4}\,dx\xrightarrow{(x+1)/2=t}\frac{1}{2}\int\frac{4t-1}{t^2+1}\,dt$$

que integrando es $\log(t^2+1)-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}t+K$ donde hay que sustituir $t=(x+1)/2$.

Algunas integrales trigonométricas. Las integrales de la forma $\int f(\operatorname{sen}x,\cos x)\,dx$ donde f es una función racional se pueden reducir a una integral de una función racional con los cambios $t=\cos x$, $t=\operatorname{sen}x$ o $t=\operatorname{tg}x$ dependiendo de si las simetrías de f son $f(x,y)=-f(-x,y)$, $f(x,y)=-f(x,-y)$ o $f(x,y)=f(-x,-y)$, respectivamente. Un último recurso si no hay simetrías es el cambio $t=\operatorname{tg}(x/2)$ que implica $\operatorname{sen}x=2t/(1+t^2)$ y $\cos x=(1-t^2)/(1+t^2)$.

Este tipo de integrales pueden dar lugar a cálculos bastante largos.

En este curso consideraremos sobre todo el caso en que f es un polinomio que conduce a las integrales $\int\operatorname{sen}^m x\ \cos^n x\ dx$ que pueden tratarse directamente. Si n es impar entonces $\cos^{n-1}x=(1-\operatorname{sen}^2x)^{(n-1)/2}$ y desarrollando la potencia se obtienen integrales del tipo $\int\operatorname{sen}^k x\cos x\,dx=(k+1)^{-1}\operatorname{sen}^{k+1}x+K$. Si m es impar, se procede análogamente invirtiendo el papel desempeñado por senos y cosenos. Si m y n son pares se aplican las fórmulas del ángulo mitad

$$\cos^2x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2x)\qquad\text{y}\qquad\operatorname{sen}^2x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x).$$

<u>Ejemplo</u>: Calcular $\int\cos^3x\,dx$ y $\int\cos^2x\ \operatorname{sen}^2x\,dx$.

$$\int\cos^3x\,dx=\int(1-\operatorname{sen}^2x)\cos x\,dx=\int(\cos x-\operatorname{sen}^2x\cos x)\,dx=\operatorname{sen}x-\frac{\operatorname{sen}^3x}{3}+K.$$

En la segunda el procedimiento anterior da lugar a

$$\int \Big(\frac{1}{2}+\frac{\cos(2x)}{2}\Big)\Big(\frac{1}{2}-\frac{\cos(2x)}{2}\Big)\,dx=\frac{x}{4}-\frac{1}{4}\int \cos^2(2x)\,dx=\frac{x}{4}-\frac{1}{4}\Big(\frac{x}{2}+\frac{\operatorname{sen}(2x)}{4}\Big)+K.$$

Las integrales trigonométricas permiten calcular algunas integrales con radicales cuadráticos tras cambios de variable adecuados.

Ejemplo: Para calcular $I=\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx$ el cambio $x=2\operatorname{sen}t$ y la relación $1-\operatorname{sen}^2 t=\cos^2 t$ eliminan la raíz a costa de introducir el factor $dx=2\cos t\,dt$. Concretamente

$$I=\int_0^{\pi/2}\sqrt{4-4\operatorname{sen}^2 t}\,(2\cos t)\,dt=4\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt=4\int_0^{\pi/2}\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2t)\Big)\,dt=4\Big(\frac{t}{2}+\frac{\operatorname{sen}(2t)}{4}\Big)\Big|_0^{\pi/2}=\pi.$$

Esto es coherente con que I representa el área de un cuarto de circunferencia de radio 2.

Integrales como $\int\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx$ y $\int(x^2\pm a^2)^{-1/2}\,dx$ también dan lugar a integrales trigonométricas tras el cambio $x=a\operatorname{tg}t$ o $x=a\cos^2 t$ pero los cálculos son un poco laboriosos y es mejor consultar su resultado en una tabla de integrales.

Integrales impropias. La definición de integral está limitada a funciones acotadas en intervalos acotados. Se puede escapar de estas limitaciones en muchas casos considerando límites en los extremos del intervalo. Se dice que estas integrales que exceden la definición original son *integrales impropias*.

Así $\int_0^\infty e^{-x/2}\,dx$ se define como $\lim_{X\to+\infty}\int_0^X e^{-x/2}\,dx$ que es $2-2\lim_{X\to+\infty}e^{-X/2}=1$. La integral $\int_0^1 x^{-1/3}\,dx$, con $x^{-1/3}$ no acotada si $x\to 0$, se redefine como $\lim_{X\to 0}\int_X^1 x^{-1/3}\,dx=\frac{2}{3}$.

Si el límite que define una integral impropia existe, se dice que es convergente. Para decidir la convergencia de una integral impropia no es necesario calcularla. Basta compararla con integrales conocidas más sencillas.

Ejemplo: La integral $\int_1^\infty f$ con $f(x)=(x^3-3x-5)/(x^4+x^2+1)$ no converge porque $f(x)\ge 0.5/x$ para x suficientemente grande, ya que $\lim_{x\to\infty}xf(x)=1$. La monotonía de la integral asegura $\int_1^X f\ge 0.5\int_1^X x^{-1}\,dx=0.5\log X$ que tiende a infinito con X.

8. Aplicaciones de la integral

Cálculo de áreas. Para hallar el área limitada por las gráficas de dos funciones hay que integrar la función cuya gráfica esta por encima menos la función cuya gráfica esta por debajo.

Ejemplo: Hallar el área de la región limitada por las gráficas de la parábola $f(x)=x^2-2x+3$ y de la recta $g(x)=x+1$.

Las gráficas se cortan cuando $f(x) = g(x)$, que lleva a $x = 1, 2$. Para $x \in [1, 2]$ la gráfica de g está por encima (basta dar un valor o hacer un esbozo de las graficas). Entonces el área es $\int_1^2 \big(x + 1 - (x^2 - 2x + 3)\big)\, dx = -\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - 2x\big|_1^2 = \frac{1}{6}$.

<u>Ejemplo</u>: Hallar el área de la región limitada por las gráficas de $f(x) = 2x^3 + 2x^2 + x - 1$ y de $g(x) = x^3 + 2x^2 + 2x - 1$.

Como $f(x) - g(x) = x^3 - x$, las intersecciones ocurren para $x = -1, 0, 1$. Claramente $x^3 - x$ es positivo para $x \in (-1, 0)$ y negativo para $x \in (0, 1)$. Por tanto el área es $\int_{-1}^0 (x^3 - x)\, dx + \int_0^1 (-x^3 + x)\, dx = \frac{1}{2}$.

Criterio de la integral. Considerando sumas superiores e inferiores formadas por rectángulos de base 1, no es difícil demostrar que si f es una función decreciente y positiva en $[k, \infty)$ entonces $\sum_{n=k+1}^N f(n) \le \int_k^N f(x)\, dx \le \sum_{n=k}^{N-1} f(n)$. En particular, bajo estas hipótesis sobre la función f, la serie $\sum_{n=k}^\infty f(n)$ converge si y sólo si la integral $\int_k^\infty f$ converge. A este criterio se le llama *criterio de la integral*. En la práctica su utilidad es limitada pues no extiende lo que ya sabríamos hacer con otros criterios.

<u>Ejemplo</u>: La serie $\sum_{n=1}^\infty n^{-1}$ no converge porque la integral $\int_1^\infty x^{-1}\, dx$ no converge. En general, $\sum_{n=1}^\infty n^{-\alpha}$ no converge para $0 < \alpha \le 1$ y converge para $\alpha > 1$ porque éste es el carácter de la integral $\int_1^\infty x^{-\alpha}\, dx$.

Este resultado ya era conocido partiendo del criterio de condensación.

Áreas y volúmenes de cuerpos de revolución. Al girar alrededor del eje X la gráfica de una función $f = f(x)$ para $x \in [a, b]$, se obtiene una superficie (llamada *de revolución*). El volumen que limita viene dado por $\pi \int_a^b \big(f(x)\big)^2\, dx$.

El área de una superficie de revolución es $2\pi \int_a^b f\sqrt{1 + (f')^2}$ pero en la práctica esta fórmula rara vez lleva a integrales que se puedan calcular explícitamente.

<u>Ejemplo</u>: Calcular el volumen V de la esfera de radio R.

La superficie esférica se obtiene girando la semicircunferencia dada por la gráfica de $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ en $x \in [-R, R]$. Entonces $V = \pi \int_{-R}^R \big(R^2 - x^2\big)\, dx = \pi\big(R^2 x - \frac{x^3}{3}\big)\big|_{-R}^R = \frac{4\pi}{3} R^3$.

<u>Ejemplo</u>: Calcular el área lateral del cono obtenido al girar la gráfica $f(x) = x$ en $[0, 1]$.

Según la fórmula el área es $2\pi \int_0^1 x\sqrt{1 + 1^2}\, dx = \pi\sqrt{2}$.