Cálculo I (Grado en Ingeniería Informática) 2012-13

Problemas adicionales resueltos

1. Calcula el límite

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1}) .$$

SOLUCIÓN. Racionalizando el numerador, obtenemos

$$L = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+n+1)-(n^2+1)}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+1}} .$$

Dividiendo por n en el numerador y en el denominador, vemos que

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{2} .$$

2. Calcula razonadamente el valor del límite $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n}$.

SOLUCIÓN. El término general de la sucesión, $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n}$, cumple

$$\frac{1}{a_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = \left((1+\frac{1}{n})^n\right)^2 \to e^2 , \quad n\to\infty .$$

Por tanto, $a_n \to \frac{1}{e^2}$, $n\to\infty$.

3. Decide razonadamente si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n\cdot(n!)^2}{(2n)!}$$

converge o diverge. Nombra o enuncia el criterio utilizado.

SOLUCIÓN. La serie es positiva, siendo su término general $a_n = \frac{7^n\cdot(n!)^2}{(2n)!}$. Por tanto,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{7^{n+1}\cdot((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}}{\frac{(2n)!}{7^n\cdot(n!)^2}} = \frac{7(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \to \frac{7}{4} , \quad n\to\infty .$$

Al ser el límite mayor que uno, la serie diverge según el *criterio del cociente*.

4. Decide la convergencia condicional o absoluta (o la divergencia, en su caso) de las series infinitas

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-1} , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n^3} ,$$

Solución. La primera serie es alternada y converge por el criterio de Leibniz, ya que la sucesión $\left(\dfrac{1}{n-1}\right)_{n=2}^{\infty}$ es positiva, decreciente y tiende a cero. Su serie asociada con los valores absolutos: $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}$ puede compararse con la armónica: $\dfrac{1}{n-1} \geq \dfrac{1}{n}$ y, por tanto, $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}$ diverge. En conclusión, la serie inicial converge condicionalmente.
La segunda serie converge absolutamente por el criterio de comparación ya que $\left|\dfrac{\operatorname{sen} n}{n^3}\right| \leq \dfrac{1}{n^3}$ y hemos visto en clase que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ converge.

5. ¿Cuáles de los siguientes límites existen y son finitos?

$$\lim_{x\to 0} x^{1/3} \operatorname{sen} \frac{1}{x}\,, \qquad \lim_{x\to 0} \cos \frac{1}{x}\,.$$

Solución. El primer límite es cero por el teorema de encaje, visto en clase, puesto que

$$\left| x^{1/3} \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \leq |x|^{1/3} \to 0\,, \quad x \to 0\,.$$

La segunda función es "oscilante": al igual que en algunos ejemplos vistos en clase, es fácil encontrar sucesiones a lo largo de las cuales los valores de la función tienden a valores diferentes. Por ejemplo, podemos elegir las sucesiones $x_n = \dfrac{1}{2\pi n} \to 0$ y $t_n = \dfrac{1}{\pi/2 + 2\pi n} \to 0$, cuando $n \to \infty$. Resulta que $f(x_n) = 1 \to 1$ mientras que $f(t_n) = 0 \to 0$, luego el límite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \cos \frac{1}{x}$ no existe.

6. Demuestra que la función

$$\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x+1}-1}$$

toma el valor $1/3$ en algún punto $c \in [1,6]$.

Solución. Sea

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x+1}-1}\,.$$

Esta función es obviamente elemental y existe con seguridad cuando $\sqrt{x+1} > 1$, es decir, para $x > 0$. (También podría existir para otros valores pero ésos no nos interesan.) Por tanto, f es continua en el intervalo cerrado $[1,6]$. Además, $f(1) = 0 < 1/3$ y $f(6) = \dfrac{1}{\sqrt{7}-1}$. Es fácil ver que este último valor es $> 1/3$ ya que $\sqrt{7}-1 < 3$ (cierto porque $\sqrt{7} < 4$). Por el teorema del valor intermedio de Bolzano, en algún punto $c \in [1,6]$ se cumple $f(c) = 1/3$.

7. ¿Para qué valor real del parámetro a es horizontal en el punto $(0,1)$ la tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3 - ax^2 - (2a^2+3)x + 1$?

Solución. La pendiente de la tangente en $x = 0$ debe ser cero: $f'(0) = -(2a^2+3) = 0$, pero $2a^2+3 \geq 3 > 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$ y, por tanto, la derivada no se puede anular. Luego la tangente no es horizonal en dicho punto para ningún valor del parámetro.

8. Calcula el límite
$$L = \lim_{x\to 0+} (e^x - 1)^x \,.$$

Solución. En primer lugar, usando la continuidad de la función elemental logaritmo y su comportamiento en los extremos de su dominio, vemos que

$$\ln L = \ln \lim_{x\to 0+} (e^x - 1)^x = \lim_{x\to 0+} \ln(e^x - 1)^x = \lim_{x\to 0+} x \ln(e^x - 1)\,.$$

El siguiente paso es convertir la expresión que figura en el límite en una fracción:

$$\ln L = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(e^x - 1)}{\frac{1}{x}}\,.$$

Puesto que tenemos una forma $\frac{\infty}{\infty}$, podemos aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\ln L = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{e^x}{e^x-1}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0+} \frac{x^2 e^x}{e^x - 1}\,.$$

El último límite puede calcularse de varias maneras. He aquí una de ellas. Recordando el límite elemental:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1\,,$$

obtenemos que

$$\ln L = -\lim_{x\to 0+} \frac{x}{e^x - 1} \cdot x e^x = -1 \cdot 0 = 0\,.$$

Puesto que $\ln L = 0$, se sigue que $L = 1$.

9. Estima el error de aproximación de la función $f(x) = \cos x$ cerca de $a = 0$ por el polinomio de Taylor de grado 3 y en el punto $x = 1/10$.

Solución. Para obtener el polinomio de Taylor $P_n(x)$ de orden n de la función coseno, tenemos dos formas de proceder:

1) usar el desarrollo de $\cos x$ en serie de Taylor alrededor de $a = 0$; en este caso: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$, truncando luego la serie después de la potencia x^n;
2) calcular las derivadas sucesivas $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, ..., evaluándolas en $a = 0$, etc.
De cualquiera de las dos maneras, obtendremos:

$$P_0(x) = 1 = P_1(x)\,, \quad P_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2} = P_3(x)\,, \quad P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} = P_5(x)\,, \quad \ldots$$

Los polinomios P_2 y P_3 coinciden porque $f'''(0) = 0$, lo cual significa que no hay ningún término con x^3.
Lo que nos interesa en concreto en este caso es $P_3(x) = 1 - x^2/2$ y $x = 1/10$. El error que se comete al aproximar $\cos x$ por $P_3(x)$, según la fórmula vista en clase, es igual a $E = f^{(4)}(c)(x-a)^4/4!$ para algún punto c entre $a = 0$ y $x = 1/10 = 0,1$. Recordando que $f^{(4)}(x) = \cos x$, tenemos la siguiente estimación para E;

$$|E| \leq \frac{|f^{(4)}(c) \cdot 0,1^4|}{24} = \frac{|\cos c| \cdot 0,0001}{24} \leq \frac{0,0001}{24} \approx 0,00004167\,.$$

10. Para la función $f(x) = x \operatorname{sen} x$, halla su polinomio de Taylor de orden 2 en $a = 0$.

Solución. La respuesta es: $P_2(x) = x^2$. Como recordaremos de la teoría vista en clase, los polinomios de Taylor en $a = 0$ de la función $\operatorname{sen} x$ son x, $x - x^3/3!$, etc. Multiplicándolos por x, obtenemos que los polinomios correspondientes de $f(x)$ son x^2, $x^2 - x^4/3!$, etc. El primero es de grado 2 mientras que el siguiente ya es de grado 4; por tanto, $P_2(x) = x^2$.
Otra manera de llegar a la misma conclusión es calculando $f'(x) = \operatorname{sen} x + x \cos x$ y $f''(x) = 2\cos x - x \operatorname{sen} x$ y evaluándolos en $x = 0$, para luego calcular $P_2(x) = f(0) + f'(0) + \dfrac{f''(0)}{2} x^2 = x^2$.

11. Calcula la integral indefinida

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \, \cos x} \, .$$

Solución. Primero aplicamos un truco visto en otros ejercicios similares:

$$I = \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \, \cos x} = \int \frac{\cos x \, dx}{\operatorname{sen}^2 x \, \cos^2 x}$$

y luego el cambio de variable $t = \operatorname{sen} x$. Éste nos da $dt = \cos x \, dx$, $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x = 1 - t^2$ y, por tanto,

$$I = \int \frac{dt}{t^2\,(1 - t^2)} = \int \frac{dt}{t^2\,(1+t)\,(1-t)} \, .$$

De esta manera hemos conseguido reducir la integral I a la integral de una función racional de t. Ésta se puede calcular usando las **fracciones simples o parciales**:

$$\frac{1}{t^2\,(1+t)\,(1-t)} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{1-t} + \frac{C}{t} + \frac{D}{t^2} \, .$$

Multiplicando ambos lados por el denominador de la izquierda: $t^2\,(1+t)\,(1-t)$, obtenemos la condición

$$1 = At^2\,(1-t) + Bt^2\,(1+t) + Ct\,(1-t^2) + D\,(1-t^2) \, .$$

Agrupando los términos constantes y los términos que contienen a t, t^2 y t^3 respectivamente, vemos que

$$1 = D + Ct + (A + B - D)t^2 + (-A + B - C)t^3 \, .$$

Para que el polinomio (constante) a la izquierda y el polinomio a la derecha sean iguales para todo $t \in \mathbb{R}$, es necesario y suficiente que sus coeficientes correspondientes sean iguales, luego

$$D = 1 \, , \quad C = 0 \, , \quad A + B - D = 0 \, , \quad -A + B - C = 0 \, .$$

De ahí se sigue inmediatamente que $D = 1$, $C = 0$, $A + B = 1$ y $B = A$. De las dos últimas ecuaciones fácilmente obtenemos $A = B = 1/2$. Por lo tanto,

$$\frac{1}{t^2\,(1+t)\,(1-t)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t^2} \, ,$$

que es la representación buscada. Integrando y recordando que $\displaystyle\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$ para todo $x \neq 0$, obtenemos

$$I = \frac{1}{2} \ln|t+1| - \frac{1}{2} \ln|t-1| - \frac{1}{t} + C = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{1}{t} + C \, ,$$

donde $C \in \mathbb{R}$ es una constante arbitraria. Finalmente, sustituyendo de nuevo $t = \operatorname{sen} x$, vemos que

$$I = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{\operatorname{sen} x + 1}{\operatorname{sen} x - 1}\right| - \frac{1}{\operatorname{sen} x} + C \, .$$

12. Evalúa la integral indefinida
$$\int \frac{dx}{9\,x^2+6\,x+5}\,.$$

Solución. Completando el cuadrado en el denominador: $9x^2+6x+5=(3x)^2+2\cdot 3x+1+4=(3x+1)^2+4$, obtenemos
$$I=\int \frac{dx}{9\,x^2+6\,x+5}=\int \frac{dx}{(3x+1)^2+4}=\frac{1}{4}\cdot\int \frac{dx}{\left(\frac{3x+1}{2}\right)^2+1}\,.$$
Después del siguiente cambio de variable (bastante obvio): $(3x+1)/2=t$, $dx=(2t/3)\,dt$, se obtiene
$$I=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg} t+C=\frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg}\frac{3x+1}{2}+C$$

13. Si una función es diferenciable dos veces y su segunda derivada es cero, deduce que la función es lineal: $f(x)=mx+n$, para algunos m, $n\in\mathbb{R}$.

Solución. La igualdad $f''(x)=0$ se cumple para todo $x\in\mathbb{R}$. Integrándola, obtenemos $f'(x)=m$ para cierta constante $m\in\mathbb{R}$ y para todo $x\in\mathbb{R}$. Integrando esta nueva igualdad, obtenemos $f(x)=mx+n$, para alguna constante $n\in\mathbb{R}$.

14. Calcula el valor exacto de la integral
$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}\,.$$

Solución. Aplicando el *cambio de variable* $\sqrt{x}=t$ en nuestra integral definida, obtenemos:
$$\frac{dx}{2\sqrt{x}}=dt\,,\quad x=t^2\,;\qquad x=1:\ t=1\,,\quad x=3:\ t=\sqrt{3}\,,$$
de manera que
$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}=2\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dt}{1+t^2}=2\operatorname{arc\,tg} x|_1^{\sqrt{3}}=2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{6}\,.$$

15. Calcula el valor de la integral $\displaystyle\int_0^{\ln 2} xe^x\,dx$.

Solución. Integrando por partes: $u=x$, $dv=e^x\,dx$, $du=dx$, $v=e^x$, obtenemos
$$\int xe^x\,dx=xe^x-\int e^x\,dx=xe^x-e^x+C\,.$$
Por el Teorema Fundamental del Cálculo, tenemos que
$$\int_0^{\ln 2} xe^x\,dx=(xe^x-e^x)|_0^{\ln 2}=\ln 2e^{\ln 2}-e^{\ln 2}-(0-e^0)=2\ln 2-2+1=2\ln 2-1\,.$$

16. Calcula el área comprendida entre las curvas $f(x)=\dfrac{1}{x}$ y $g(x)=4-x$.

SOLUCIÓN. Los puntos de intersección de las dos gráficas se encuentran resolviendo la ecuación $f(x) = g(x)$, es decir, $\frac{1}{x} = 4 - x$. Para $x \neq 0$, la ecuación es equivalente a $1 = 4x - x^2$, que es lo mismo que $x^2 - 4x + 1 = 0$. Las soluciones de esta ecuación cuadrática son

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3},$$

siendo ambas positivas y menores que 4 ya que $2 > \sqrt{3}$. Observando las gráficas de las funciones f y g entre $x = 2 - \sqrt{3}$ y $x = 2 + \sqrt{3}$, vemos que $g(x) > f(x)$ en dicho intervalo y que encierran una región en forma parecida a la de media luna, contenida en el triángulo con los vértices $(0,0)$, $(4,0)$ y $(0,4)$. Esto se puede comprobar algebraicamente, pues en el intervalo $(2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$ se cumple $x^2 - 4x + 1 < 0$, luego $1 < 4x - x^2$ y, al ser x positivo, podemos dividir por x para deducir que $4 - x > \frac{1}{x}$.
El área entre las dos gráficas es, por tanto,

$$A = \int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} (g(x) - f(x))\, dx = \int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} (4 - x - \frac{1}{x})\, dx = (4x - \frac{x^2}{2} - \ln|x|)\Big|_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} - \ln\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}.$$

17. Evalúa la integral

$$\int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{dx}{(x-1)(9+x^2)}.$$

SOLUCIÓN. Primero descomponemos la fracción en suma de fracciones simples. Dado que $9 + x^2 \geq 9 > 0$, este trinomio cuadrático no tiene ceros reales, luego no se puede factorizar más (en factores lineales con coeficientes reales). Por tanto, según la teoría, buscamos los números reales A, B y C para los que

$$\frac{1}{(x-1)(9+x^2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{9+x^2}$$

para todo x. Multiplicando ambos lados por $(x-1)(9+x^2)$, obtenemos

$$1 = A(9+x^2) + (x-1)(Bx+C) = (A+B)x^2 + (C-B)x + 9A - C\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Comparando los coeficientes del polinomio a la derecha con los del polinomio constante uno, deducimos que

$$A + B = 0\,, \quad C - B = 0\,, \quad 9A - C = 1\,.$$

Por tanto, $B = C = -A$ y $10A = 1$, luego $A = 1/10$ y $B = C = -1/10$. Finalmente,

$$\frac{1}{(x-1)(9+x^2)} = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{10}\cdot\frac{x+1}{9+x^2} = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{10}\cdot\frac{x}{9+x^2} - \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{9+x^2}\,.$$

La primera fracción se integra directamente, la segunda usando el cambio de variable $t = 1 + x^2$ y la tercera, directamente o poniendo primero $x = 3t$. El resultado final es

$$\begin{aligned}
\int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{dx}{(x-1)(9+x^2)} &= \left(\frac{1}{10}\ln|x-1| - \frac{1}{20}\ln(9+x^2) - \frac{1}{30}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{3}\right)\Bigg|_{\sqrt{3}}^{3} \\
&= \frac{1}{10}\ln\frac{2}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{20}\ln\frac{18}{12} - \frac{1}{30}(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}) \\
&= \frac{1}{10}\ln(\sqrt{3}+1) - \frac{1}{20}\ln\frac{3}{2} - \frac{\pi}{360}\,.
\end{aligned}$$

18. Halla $F'(x)$ cuando la función F viene dada por

$$\text{(a) } F(x) = \int_0^{x^2} e^{-t}\,dt\,, \qquad \text{(b) } F(x) = \int_{x^2}^{e^x+x} \log(t^2+1)\,dt\,.$$

SOLUCIÓN. (a) Considerando la función $g(x) = \int_0^x e^{-t}\,dt$, vemos que F es la función compuesta de g y $h(x) = x^2$: $F(x) = g(x^2) = g(h(x))$. Por tanto, la Regla de la Cadena y el Teorema Fundamental del Cálculo nos dicen que

$$F'(x) = g'(x^2)\cdot 2x = 2xe^{-x^2}\,.$$

(b) Para poder aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo, representamos la función F como diferencia de dos integrales:

$$F(x) = \int_{x^2}^{e^x+x} \log(t^2+1)\,dt = \int_0^{e^x+x} \log(t^2+1)\,dt - \int_0^{x^2} \log(t^2+1)\,dt\,.$$

Derivando la diferencia, obtenemos (como en el apartado anterior):

$$F'(x) = (e^x+1)\log((e^x+x)^2+1) - 2x\log(x^4+1)\,.$$

19. Si $f:\ [0,1]\to\mathbb{R}$ es una función continua y $\int_0^1 f(t)\,dt = 1$, ¿es cierto que siempre existe $c\in(0,1)$ tal que $\int_0^c f(t)\,dt = \frac{1}{3}$? Razona la respuesta.

SOLUCIÓN. Sí, esto se cumple siempre. Damos la prueba a continuación.
En primer lugar, puesto que $f\in C[0,1]$, podemos definir la función F mediante

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt\,, \qquad x\in[0,1]\,.$$

Según el *Teorema Fundamental del Cálculo*, F es diferenciable y, por tanto, continua en el mismo intervalo. Además, F cumple

$$F(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0\,, \qquad F(1) = \int_0^1 f(t)\,dt = 1\,.$$

Puesto que $0 < 1/3 < 1$, por el *Teorema de Bolzano* se sigue que existe $c\in(0,1)$ tal que $F(c) = 1/3$; es decir,

$$\int_0^c f(t)\,dt = \frac{1}{3}\,.$$

20. (a) Determina los puntos críticos de la función

$$F(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt\,, \qquad x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right),$$

en el intervalo indicado.

(b) Razona si los puntos críticos encontrados son puntos de máximo o mínimo o no.

Solución. (a) Aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo, derivamos la función F, obteniendo

$$F'(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,.$$

Para encontrar los puntos críticos de F, igualamos la derivada a cero y obtenemos $\operatorname{sen} x = 0$. Recordando que $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$, la única posibilidad es $x = \pi$.

(b) Para decidir si el punto crítico encontrado, $x = \pi$, es un punto de extremo local o no, calculamos la segunda derivada de F (aplicando la regla del cociente) y examinamos su signo en dicho punto:

$$F''(x) = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)' = \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}\,; \quad F''(\pi) = \frac{\pi\cdot(-1) - 0}{\pi^2} = -\frac{1}{\pi} < 0\,.$$

Por tanto, el punto crítico es un punto de máximo local.