Cálculo I (Grado en Ingeniería Informática) 2012-13

Solucionario del segundo examen parcial, diciembre de 2012

Turno de mañana

1. ¿En cuál (o cuáles) de los siguientes intervalos:

$$I_1 = [-1, 0], \quad I_2 = [0, 1] \quad \text{e} \quad I_3 = [1, 2]$$

podemos afirmar con seguridad que la ecuación

$$2x^2 - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 1/2$$

tiene un cero? Razona la respuesta.

Solución. La pregunta se reduce al estudio de los ceros de la función

$$f(x) = 2x^2 - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{1}{2}$$

en cada uno de los intervalos indicados. Observemos que f es una función elemental y, por tanto, continua en el intervalo $[-1, 2]$. Puesto que

$$f(-1) = 2 - \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} > 0\,, \qquad f(0) = -\frac{1}{2} < 0\,,$$

el teorema de Bolzano nos garantiza la existencia de un cero de f en el intervalo I_1. Lo mismo ocurre con I_2 ya que

$$f(0) = -\frac{1}{2} < 0\,, \qquad f(1) = 2 - 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0\,.$$

Sin embargo, puesto que

$$f(1) = 2 - 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0\,, \qquad f(2) = 8 - 0 - \frac{1}{2} = \frac{15}{2} > 0\,,$$

no podemos asegurar que exista un cero de f en I_3.

2. Determina en qué puntos $x \in \mathbb{R}$ la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + x & \text{si } x > 0, \\ x - \dfrac{1}{8} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

es *derivable*.

Solución. Es fácil ver que f es derivable en cualquier punto $x \neq 0$. Por ejemplo, si $a > 0$, en el intervalo $(0, 2a)$ la función f viene representada por la fórmula $\dfrac{x^2}{2} + x$, una función derivable en $x = a$.
Sin embargo, la función f no es continua en $x = 0$ ya que los límites laterales no coinciden:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x - \frac{1}{8} = -\frac{1}{8}\,, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{2} + x = 0\,.$$

Al ser discontinua en dicho punto, la función f no es diferenciable ahí.

3. Calcula los siguientes límites:
(a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{arc\,tg} x} .$$

(b)

$$\lim_{x\to 0} (1+7x)^{1/x} .$$

Solución. (a) El límite tiene la forma "$\frac{0}{0}$" ya que

$$\operatorname{sen}(\operatorname{tg} 0) = \operatorname{sen} 0 = 0 , \qquad \operatorname{arc\,tg} 0 = 0 .$$

Aplicando la regla de L'Hopital (junto con la regla de la cadena), obtenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{arc\,tg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(\operatorname{tg} x)\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{1+x^2}} = \frac{\cos 0 \cdot 1}{1} = 1 .$$

(b) Sea

$$L = \lim_{x\to 0} (1+7x)^{1/x} .$$

Tomando logaritmos y utilizando la continuidad de la función logaritmo, obtenemos

$$\ln L = \ln \lim_{x\to 0} (1+7x)^{1/x} = \lim_{x\to 0} \ln (1+7x)^{1/x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln (1+7x)}{x} .$$

Una vez más, hemos obtenido un límite de tipo "$\frac{0}{0}$" y podemos aplicar L'Hopital (y la regla de la cadena):

$$\ln L = \lim_{x\to 0} \frac{\ln (1+7x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+7x} \cdot 7}{1} = 7 .$$

.

4. Consideremos la función $f(x) = e^{2x^3 - x}$.
(a) ¿En qué puntos la función f alcanza sus valores máximo y mínimo?
(b) ¿En qué punto corta al eje X la recta tangente a la gráfica de f en $x = 0$?

Solución. (a) Aplicando la regla de la cadena, calculamos la derivada de nuestra función:

$$f'(x) = (6x^2 - 1)e^{2x^3 - x} .$$

Puesto que la función exponencial sólo toma valores positivos, el signo de la derivada de f coincide con el de la función $6x^2 - 1$. Ésta se anula en los puntos $\pm 1/\sqrt{6}$, es negativa en el intervalo $(-1/\sqrt{6}, +1/\sqrt{6})$ y positiva en el resto. Por tanto, alcanza su máximo en $-1/\sqrt{6}$ y su mínimo en $+1/\sqrt{6}$.

(b) Puesto que $f'(0) = (-1) \cdot e^0 = -1$ y $f(0) = 1$, la ecuación de la recta tangente en $x = 0$ es $y - 1 = -x$. La intersección con el eje X se obtiene cuando $y = 0$ y, por tanto, $x = 1$; es decir, en el punto $(1, 0)$.

5. a) Demuestra que la tangente a la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{6x}{\pi} - 4 \operatorname{sen}^2(x)$$

es horizontal en algún punto $c \in (0, \pi/6)$.

b) Comprueba que ese valor cumple la condición $\operatorname{sen}(2c) = 3/(2\pi)$.

SOLUCIÓN. a) Puesto que

$$f(0) = 0\,, \qquad f(\pi/6) = 1 - 4\operatorname{sen}^2(\pi/6) = 1 - 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0\,,$$

el Teorema de Rolle nos dice que la derivada de f se anula en algún punto $c \in (0, \pi/6)$ o, lo que es lo mismo, que la tangente a la gráfica de f es horizontal en algún punto $c \in (0, \pi/6)$.
Sólo nos queda calcular la derivada e igualarla a cero en el punto c mencionado arriba:

$$f'(x) = \frac{6}{\pi} - 8\operatorname{sen}x\cos x = \frac{6}{\pi} - 4\operatorname{sen}(2x)\,, \qquad f'(c) = \frac{6}{\pi} - 4\operatorname{sen}(2c) = 0\,.$$

De la última igualdad se sigue que $\operatorname{sen}(2c) = 6/(4\pi) = 3/(2\pi)$.

Turno de tarde

1. Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si} \quad x < -2, \\ x^2 + bx + 5 & \text{si} \quad -2 \le x \le 0 \\ x + c & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

Estudia la continuidad de la función f en los puntos -2, -1 y 3 en función de los valores de los parámetros a, b y c.

SOLUCIÓN. En el intervalo $(0, +\infty)$ la función viene dada como una función lineal: $x+c$. Para cualquier valor fijo de c, ésta es continua en todos los puntos de dicho intervalo y, en particular, en $x = 3$. Los otros dos parámetros no intervienen y, por tanto, sus valores también pueden ser cualesquiera.
De manera análoga, la función $2x+a$ es continua en $(-\infty, -2)$, sea cual sea el valor del parámetro a (y lo mismo para b y c) y, por tanto, es continua en $x = -1$.
Sin embargo, la función f está definida de dos maneras diferentes a la izquierda y a la derecha del punto -2. Los límites laterales de f en dicho punto son:

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-}(2x + a) = -4 + a\,, \qquad \lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+}(x^2 + bx + 5) = 9 - 2b\,.$$

Por tanto, f será continua en $x = -2$ si y sólo si coinciden sus límites laterales; es decir, si y sólo si $-4+a = 9-2b$, lo cual es equivalente a $a + 2b = 13$. La continuidad en $x = -2$, por tanto, no depende del valor de c.

2. Calcula los siguientes límites:
(a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}4x}{\operatorname{sen}9x}$$

(b)

$$\lim_{x\to 0}(1 + \operatorname{sen}x)^{1/x}\ .$$

SOLUCIÓN. El problema es completamente análogo al ejercicio **2** del turno de mañana.

(a) Por L'Hopital, obtenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 4x}{\operatorname{sen} 9x}=\lim_{x\to 0}\frac{4\cos(4x)}{9\cos(9x)}=\frac{4}{9}\,.$$

(b) Sea

$$L=\lim_{x\to 0}\,(1+\operatorname{sen} x)^{1/x}\;.$$

Tomando logaritmos y aplicando L'Hopital después, obtenemos

$$\ln L=\ln\lim_{x\to 0}\,(1+\operatorname{sen} x)^{1/x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\operatorname{sen} x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+\operatorname{sen} x}\cdot\cos x}{1}=1\,.$$

3. Considera la función

$$f(x)=\frac{\ln x}{x}.$$

Determina para qué valores de x está definida y examina su comportamiento en los extremos del dominio. Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los puntos de máximo y mínimo. Finalmente, esboza su gráfica.

SOLUCIÓN. La función f sólo está definida cuando está definido el logaritmo, así que el dominio es $(0,+\infty)$. Examinemos el comportamiento en los extremos del dominio y las posibles asíntotas. Cuando $x\to 0^+$, sabemos que $\ln x\to-\infty$; al dividir por x que es pequeño y positivo, vemos que $f(x)\to-\infty$. Esto significa que la recta $x=0$ (el eje Y) es una asíntota vertical de la gráfica. Por L'Hopital, deducimos inmediatamente que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\,.$$

Por tanto, la recta $y=0$ (el eje X) es una asíntota horizontal de la gráfica (para los valores grandes de x).

La única intersección con los ejes de las coordenadas se obtiene cuando $y=0$, es decir, cuando $\ln x=0$ y eso sólo es posible para $x=1$. Cuando $0<x<1$, sabemos que $\ln x<0$ y, por consiguiente, f toma valores negativos (su gráfica está por debajo del eje X), mientras que para $1<x<+\infty$ la función es positiva (esa parte de la gráfica está por encima del eje X).

La derivada de f, según la regla del cociente, es

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

y, por tanto, es nula sólo para $x=e$, positiva en el intervalo $0<x<e$ (intervalo de crecimiento de f) y negativa en $(e,+\infty)$ (intervalo de decrecimiento). Se sigue que f alcanza su máximo (global) en $x=e$; dicho máximo es igual a $f(e)=1/e$.

Con estos datos, es fácil esbozar la gráfica, teniendo en cuenta que pasa por los siguientes puntos: $(1/e,-e)$, $(1,0)$, $(e,1/e)$, $(e^2,2/e^2)$.

Aunque eso no se pide, examinando la segunda derivada, podría verse que f tiene un punto de inflexión (donde cambia de convexidad) entre e y $+\infty$; ese punto se puede calcular explícitamente.

4. Calcula el polinomio de Taylor de grado 6 de la función $f(x)=\cos x$ en el punto $x=0$. Utilizando la fórmula anterior, calcula $g^{(8)}(0)$ de la función $g(x)=\cos x^2$.

SOLUCIÓN. Calculando las derivadas de f de todos los órdenes hasta 6 y aplicando la fórmula general para el polinomio de Taylor o, alternativamente, partiendo de la fórmula (vista en clase) para la serie de Taylor de la función coseno en $x = 0$, obtenemos

$$P_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$

Sustituyendo x^2 en lugar de x, se obtiene el polinomio de Taylor de orden 12 de la función g:

$$1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{12}}{6!}$$

El coeficiente al lado de x^8 es igual a $g^{(8)}(0)/8!$. Igualando ambas cantidades, vemos que $\dfrac{1}{4!} = \dfrac{g^{(8)}(0)}{8!}$. Despejando, obtenemos

$$g^{(8)}(0) = \frac{8!}{4!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 56 \cdot 30 = 1680.$$

5. Determina el número exacto de ceros (distintos entre sí) de la ecuación $x^5 + 2x^3 + x + 1 = 0$.

SOLUCIÓN. Sea $f(x) = x^5 + 2x^3 + x + 1$. Puesto que $f(-1) = -1 - 2 - 1 + 1 = -3 < 0$ y $f(0) = 1 > 0$, el teorema de Bolzano implica que f tiene, al menos, un cero en el intervalo $(-1, 0)$.
Si f tuviera dos ceros distintos, digamos a y b, según el teorema de Rolle su derivada tendría también un cero en el intervalo (a, b). Sin embargo, la derivada es $f'(x) = 5x^4 + 6x^2 + 1$ y, puesto que $x^2 \geq 0$ y $x^4 \geq 0$ para todo número real x, se sigue que $f'(x) \geq 1 > 0$ para todo x, así que la derivada no se anula. Luego f no puede tener dos ceros diferentes, así que tiene exactamente uno y éste está en el intervalo $(-1, 0)$.
Observemos que ese cero, c, es obligatoriamente simple. No puede ser un cero doble ni de ningún orden mayor que uno ya que $f(c) = 0$ y $f'(c) \neq 0$.