Cálculo I (Grado en Ingeniería Informática) 2012-13

Solucionario del primer examen parcial, octubre de 2012

---

1. (Tarde) Encuentra razonadamente todos los valores $x \in \mathbb{R}$ para los que se cumple que $|x^2+2x+1| \leq 4$.

(Mañana) Encuentra razonadamente todos los valores $x \in \mathbb{R}$ para los que se cumple que $|x^2-2x+1| \leq 9$.

Solución. (Tarde) Lo más directo es observar que lo de dentro del valor absoluto es un cuadrado. Y entonces

$$|x^2+2x+1| \leq 4 \iff |(x+1)^2| \leq 4 \iff (x+1)^2 \leq 4 \iff |x+1| \leq 2,$$

(observa cómo hemos sacado una raíz cuadrada), que finalmente nos dice que $-2 \leq x+1 \leq 2$, es decir, que $-3 \leq x \leq 1$.

Alternativamente, podemos escribir que

$$|x^2+2x+1| \leq 4 \iff -4 \leq x^2+2x+1 \leq 4,$$

y calcular los valores de x que verifican, simultáneamente, que $x^2+2x-3 \leq 0$ y que $x^2+2x+5 \geq 0$. La segunda se cumple para todo x, mientras que la primera nos da el rango $x \in [-3,1]$.

Una última estrategia consiste en decidir cuándo x^2+2x+1 es positivo y negativo. Como es siempre positivo,

$$|x^2+2x+1| \leq 4 \iff x^2+2x+1 \leq 4 \iff x^2+2x-5 \leq 0,$$

que nos vuelve a dar el rango $x \in [-3,1]$.

En realidad, las tres estrategias son (casi) lo mismo. El ejercicio de los grupos de mañana es análogo (observa que $x^2-2x+1=(x-1)^2$). Y el resultado es que $x \in [-2,4]$.

2. (Tarde) Demuestra *por inducción* que, para todo $n \geq 1$,

$$1+3+5+\cdots+(2n+1)=(n+1)^2.$$

Solución. Observa que el enunciado nos proporciona una fórmula para sumar los primeros $n+1$ números impares.

Vamos con la prueba. El caso $n=1$ nos dice que $1+3=(1+1)^2$, que es claramente cierto.

Supongamos que, para un n fijo, se cumple que $1+3+5+\cdots+(2n+1)=(n+1)^2$. Ahora consideramos el caso siguiente, es decir, sumamos un impar más. Nos gustaría obtener, para este caso, que

$$1+3+5+\cdots+(2n+1)+(2n+3)=(n+2)^2.$$

Veámoslo:

$$1+3+5+\cdots+(2n+1)+(2n+3) \overset{\text{hip. inducción}}{=} (n+1)^2+(2n+3)=n^2+4n+4=(n+2)^2,$$

que es justo lo que pretendíamos.

2. (Mañana) La sucesión (a_n) viene dada por la siguiente fórmula recurrente:

$$a_1=\frac{1}{2}, \qquad a_{n+1}=2a_n-\frac{1}{4} \quad \text{para cada } n \geq 1.$$

Demuestra *por inducción* que $a_n > \frac{1}{4}$ para todo $n \in \mathbb{N}$; y prueba que la sucesión es creciente.

Solución. Empezamos probando que $a_n > 1/4$ para todo n. Es obvio que $a_1 > 1/4$.

Supongamos que, para un n fijo, resulta que $a_n > 1/4$. El siguiente término de la sucesión, a_{n+1}, viene dado por

$$a_{n+1} = 2a_n - \frac{1}{4},$$

y como $a_n > 1/4$, resulta que

$$a_{n+1} > 2\,\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$

que es lo que queríamos probar.

Para la segunda parte: queremos probar que $a_{n+1} > a_n$ para todo n. Pero como $a_{n+1} = 2a_n - 1/4$, es lo mismo que exigir que

$$2a_n - \frac{1}{4} > a_n \quad \Longleftrightarrow \quad a_n > \frac{1}{4}\,,$$

que ya sabemos que es cierto, por el apartado anterior.

3. (Tarde) Calcula el límite

$$\lim_{n\to\infty} \left(n^2\,\sqrt{n^2+3n} - n^3\right),$$

Solución. Usamos el truco habitual de racionalizar:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \left(n^2\,\sqrt{n^2+3n} - n^3\right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(n^2\,\sqrt{n^2+3n} - n^3\right)\left(n^2\,\sqrt{n^2+3n} + n^3\right)}{n^2\,\sqrt{n^2+3n} + n^3} \\ = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4\,(n^2+3n) - n^6}{n^2\,\sqrt{n^2+3n}+n^3} &= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^5}{n^2\,\sqrt{n^2+3n}+n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{\sqrt{1+3/n}+1}\end{aligned}$$

(en el último paso hemos dividido arriba y abajo por n^3, pues el denominador es comparable con n^3). Escrito así, es inmediato comprobar que el límite es $+\infty$.

3. (Mañana) Calcula razonadamente el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}.$$

Solución. Unas sencillas manipulaciones para "acercarlo" a límites que involucren al número e:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}}.$$

El límite del numerador es 1, y el del denominador, $1/e$. El resultado final es que el límite original vale e.

Un argumento alternativo consiste en observar que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{m+1}{m}\right)^{m},$$

que es directamente el número e.

4. (Tarde) Decide si la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n+2}$$

converge o diverge. Justifica adecuadamente tu respuesta (por ejemplo, si usas algún criterio específico, nómbralo y explica por qué y cómo se aplica).

Solución. Observa que es una serie de términos positivos. El término general de la serie, $a_n = \frac{\sqrt{n}+1}{n+2}$, converge a 0 cuando $n \to \infty$, como es necesario para la (hipotética) convergencia. Pero además es asintóticamente equivalente a $1/\sqrt{n}$, como se comprueba fácilmente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}+1}{n+2}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)}{n+2} = 1.$$

Aplicando el criterio asintótico de comparación, y como sabemos que $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, deducimos que la serie del enunciado también diverge.

4. (Mañana) Decide si la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$$

converge o diverge. Justifica adecuadamente tu respuesta (por ejemplo, si usas algún criterio específico, nómbralo y explica por qué y cómo se aplica).

Solución. Argumentamos como en la serie anterior, pero ahora la comparación (asintótica) correcta es con $1/n^{3/2}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}\, n^{1/2}}{n^2+1} = 1.$$

Aplicando el criterio asintótico de comparación, y como sabemos que $\sum_n \frac{1}{n^{3/2}}$ converge, deducimos que la serie del enunciado también converge.

5. (Tarde) Determina si la serie infinita

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+2000}}$$

diverge, converge absolutamente o converge condicionalmente. Justifica, de nuevo, tu respuesta.

Solución. Es una serie alternada en signo. No converge absolutamente porque

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+2000}} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2000}}$$

diverge, por comparación asintótica con la serie $\sum_n 1/\sqrt{n}$ (que ya sabemos que diverge).

Pero es fácil comprobar que $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+2000}}$ es una sucesión de números positivos, decreciente y tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Justo las hipótesis con las que el criterio de Leibniz nos permite concluir que la serie converge condicionalmente.

5. (Mañana) Determina si la serie infinita

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1}$$

diverge, converge absolutamente o converge condicionalmente. Justifica, de nuevo, tu respuesta.

Solución. La serie diverge porque el término general no tiende a 0. De hecho

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1}$$

no existe: la sucesión $\frac{n^2}{n^2+1}$ converge a 1, mientras que $(-1)^n$ alterna su valor entre 1 y -1.