Cálculo de primitivas

1. Calcula las siguientes primitivas:

a) $\displaystyle\int (x^2+3x)\Big(5x^3-\frac{8}{x^3}\Big)\,dx$ *b)* $\displaystyle\int \Big(e^x(e^x-e^{-x})+\frac{1}{5x-2}\Big)\,dx$

c) $\displaystyle\int \Big(3\,\mathrm{sen}(5x)-\frac{x}{2}-\frac{5}{1+4x^2}\Big)\,dx$ *d)* $\displaystyle\int \Big(\frac{x}{1+x^2}+\frac{2}{(4x+1)^2}+\frac{4}{\sqrt{1-2x^2}}\Big)\,dx$

(Nota: puedes usar que $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx=\frac{1}{a}\arctan(x/a)+C$; $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin(x/a)+C$).

2. Calcula las siguientes primitivas (integrando por partes):

a) $\displaystyle\int (x+2)2^x\,dx$ *b)* $\displaystyle\int (x^2-2x)e^{-5x+3}\,dx$ *c)* $\displaystyle\int x\cos(5x)\,dx$

d) $\displaystyle\int \mathrm{sen}\,x\,e^{-x}\,dx$ *e)* $\displaystyle\int x\sqrt{x+1}\,dx$

3. Integrando por partes con $u=\mathrm{sen}^{n-1}x$, obtén la fórmula

$$\int \mathrm{sen}^n x\,dx=-\frac{1}{n}\,\mathrm{sen}^{n-1}x\cos x+\frac{n-1}{n}\int \mathrm{sen}^{n-2}x\,dx \qquad \text{para } n\ge 2 \text{ entero}$$

y úsala para calcular $\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}^5 x\,dx$.

4. Calcula las siguientes primitivas (usando el método de las fracciones simples):

$$\int \frac{x}{(x+1)(x-3)}\,dx,\quad \int \frac{x^3+1}{x^3+x}\,dx,\quad \int \frac{2}{(x-1)(x+3)^2}\,dx,\quad \int \frac{5x^2+5}{(x^2-1)(x^2+2x+2)}\,dx.$$

Sobre la integral y el teorema fundamental del Cálculo

5. Halla $f'(x)$ si

a) $\displaystyle f(x)=\int_0^x (1+t^2)^{-2}\,dt$, *b)* $\displaystyle f(x)=\int_0^{x^2} (1+t^2)^{-3}\,dt$, *c)* $\displaystyle f(x)=\int_{x^3}^{x^2} (1+t^2)^{-3}\,dt$

6. Comprueba que

$$\int_0^x |t|\,dt=\frac{1}{2}x\,|x| \qquad \text{para todo } x\in\mathbb{R}.$$

7. Explica geométricamente por qué se cumple

$$\int_a^b f(a+b-x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

8. Supongamos que f es una función derivable en todo x y que satisface la ecuación

$$\int_0^x f(t)\,dt=-\frac{1}{2}+x^2+x\,\mathrm{sen}(2x)+\frac{1}{2}\cos(2x) \quad \text{para todo} \quad x\ge 0\,.$$

Calcula $f(\pi/4)$ y $f'(\pi/4)$.

Cálculo de integrales (a través de primitivas)

9. Calcula $\int_0^1 f(x)\,dx$, con $f(x)$ igual a:

$$a)\ \frac{1}{e^x+4e^{-x}} \qquad b)\ \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} \qquad c)\ \frac{4^x+1}{2^x+1} \qquad d)\ \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}$$

(Nota: puedes usar que $\int dx/\sqrt{x^2+1} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+K$).

10. Calcula $\int_0^{\pi/4} f(x)\,dx$, con $f(x)$ igual a:

$$a)\ \operatorname{tg}(x) \qquad b)\ \cos^4(x) \qquad c)\ \operatorname{tg}^2(x) \qquad d)\ \operatorname{sen}^5(x)\cos^3(x)$$

11. Calcula las siguientes integrales impropias:

$$a)\ \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx, \qquad b)\ \int_0^{\infty} e^{-5x}\,dx, \qquad c)\ \int_0^1 \ln(x)\,dx.$$

12. Expresa la integral $\int_0^\infty x^2e^{-x^2}\,dx$ en términos de $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$.

Cálculo de áreas

13. Calcula el área de la región limitada por

a) el eje X y la gráfica de $f(x)=\operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0,8\pi]$;

b) el intervalo $[0,\pi]$ del eje X y la gráfica de la función $f(x)=\lfloor x\rfloor$ (la función "parte entera", o "suelo").

14. Halla el área de la región limitada por las gráficas de los pares de funciones que se indican:

$$a)\ f(x)=\frac{2}{4x^2+1} \quad \text{y} \quad g(x)=2|x|,$$

$$b)\ f(x)=x\left(e^x+1\right) \quad \text{y} \quad g(x)=x+x^2e^x,$$

15. Dada $f(x)=x^2-2x+7$, consideramos el triángulo curvilíneo T limitado entre las tangentes en $x=0$ y $x=2$ y la gráfica de f. Halla el área de T.

16. Halla el área de la región limitada por la curva $y^2=3x$ y la recta $2y-2x+3=0$.

17. Dados $a,b\in\mathbb{R}^+$, calcula el área de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

18. Calcula el área de la región plana limitada por la párabola de ecuación $(y-2)^2=x-1$, la tangente a esta párabola en el punto $(2,1)$ y el eje X.

Cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos de revolución

19. Deduce, usando integrales, que el volumen de la esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$ y que el volumen de un cono recto de altura h y radio de la base r es $\frac{1}{3}\pi r^2h$.

20. Consideremos la región tridimensional infinita $\mathcal{R}$ obtenida al hacer girar la gráfica de $f(x) = x^{-1}$ alrededor del eje X para $x \geq 1$. Comprueba que el volumen de $\mathcal{R}$ es finito y sin embargo su área (lateral) es infinita. Por tanto, se da la paradoja de que pintar $\mathcal{R}$ requiere un área infinita de pintura pero, si es transparente, basta verter un volumen finito de pintura en su interior.

21. Halla el volumen del cuerpo engendrado por la curva

$$y^2 = \frac{1}{9}x(x-3)^2 \quad \text{con} \quad 0 \leq x \leq 3$$

al girarla alrededor del eje X.

22. Halla el área de la región plana definida por las desigualdades:

$$2y - x^2 \geq 0 \qquad \text{y} \qquad 2x + y^2 \leq 0\,,$$

y el volumen del cuerpo engendrado por dicha region al girar alrededor del eje X.

Ejercicios extra

23. Estudia la convergencia de las siguientes series mediante el criterio de la integral:

$$a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n}, \qquad b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}, \qquad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1},$$

24. Una partícula se mueve a lo largo del eje X describiendo una trayectoria $x = x(t)$ con velocidad $v(t) = At^2 + 1$. Calcula A sabiendo que $x(1) = x(0)$.

25. La proporción x de moléculas de un gas en la atmósfera disminuye cuando la altura crece con una tasa de variación proporcional a x, es decir,

$$\frac{dx}{dh} = -Cx$$

donde h es la altura en kilómetros sobre el nivel del mar.

a) Dividiendo entre x e integrando, halla una fórmula para $x = x(h)$.

b) Para el oxígeno, $C = 0.07$. ¿A qué altura la proporción de oxígeno es la mitad de la que hay a nivel del mar? Responde a la misma pregunta para el hidrógeno, para el que $C = 0.006$.

c) Teniendo en cuenta que a nivel del mar hay unas 400 000 moléculas de oxígeno por cada una de hidrógeno, ¿a qué altura habrá más hidrógeno que oxígeno?