Aplicación de teoremas sobre derivadas

1. Halla un $c \in (1, 22)$ tal que $(f(22) - f(1))/21 = f'(c)$ para $f(x) = x^3 + x$.

2. ¿Puede existir una función $f(x)$ diferenciable con $f(0) = -1$, $f(2) = 4$ y $f'(x) \leq 2$ para todo x?

3. Sea f es una función dos veces derivable tal que la ecuación $f(x) = 0$ tiene al menos tres soluciones en $[a, b]$. Usando el teorema de Rolle, prueba que existe $c \in (a, b)$ tal que $f''(c) = 0$.

4. Calcula el número exacto de soluciones $x \in \mathbb{R}$ de las siguientes ecuaciones:

a) $2x - 1 = \operatorname{sen} x$; *b*) $2x^3 + ax = a$, con $a > 0$; *c*) $x = \arctan x$ *d*) $(x + 2)^{1/4} - x^{1/4} = 1$.

Indicación: Por el teorema de Rolle, si f' no se anula en un intervalo, entonces $f(x) = 0$ no puede tener dos soluciones en dicho intervalo. recuerda también el Teoremas de Bolzano.

5. Demuestra que las ecuaciones $x^5 + 10x + 3 = 0$ y $3x - 2 + \cos \frac{\pi}{2} x = 0$ tienen (cada una) exactamente una raíz real.

6. Usa el teorema del valor medio para demostrar que $|\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b| \leq |a - b|$.

Sobre cálculo de límites

7. Calcula los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1 + \cos(\pi x)}{x^2 - 2x + 1}$, *b*) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\cos(6x))}{\ln(\cos(3x))}$, *c*) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x \cos x - 2\ln(1 + x)}{x^2}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3}\right)^{1/x}$ $a, b, c > 0$, *e*) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x \operatorname{sen}(a/x)$, *f*) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

Sobre máximos/míminos

8. Calcula los valores máximo y mínimo de $f(x) = x^3 - 3\,x^2 - 9\,x + 1$ en el intervalo $[-2, 6]$.

9. El volumen $v = v(T)$ de 1 gramo de agua (medido en cm^3) se expresa como función de la temperatura T por la siguiente fórmula (aproximada) obtenida experimentalmente:

$$v(T) = 1 + 8.38 \cdot 10^{-6}(T - 4)^2.$$

¿A qué temperatura este volumen será mínimo? ¿Cuál es ese volumen mínimo?

10. El número de individuos de una población (en miles) viene dado por

$$N(t) = 1 + (3 - t)^2 e^{-t}, \text{ con } t \geq 0, \qquad t = \text{ tiempo que transcurre (en años).}$$

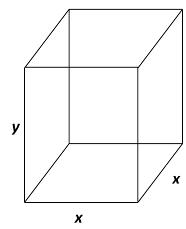
¿Cuándo la población alcanza su valor máximo? ¿Cuál será la población a largo plazo?

11. Determina el punto (o puntos) de la curva $y = 4 - x^2$ que está (o están) *lo más cerca* posible del punto $P = (0, 2)$.

(*Sugerencia:* Sitúa primero el punto P en el plano y esboza el dibujo de la curva $y = 4 - x^2$) .

12. Prueba que, de entre todos los rectángulos de igual perímetro, el de mayor área es el cuadrado.

13. Una empresa recibe el encargo de construir cajas con forma de paralelepípedo de modo que la base sea un cuadrado. El material que se usa para la base y la tapa superior tiene un coste de 2 euros por m^2, mientras que el material utilizado para las paredes laterales tiene un coste de 8 euros por m^2. Además, el volumen de las cajas debe ser 0.25 m^3. ¿Cuáles deben de ser las dimensiones de la caja para tener un coste mínimo?



Análisis de gráficas de funciones

14. Halla los intervalos de crecimiento/decrecimiento y de concavidad/convexidad de:

a) $f(x) = x + \frac{1}{x}$; b) $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 3$; c) $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(2x) - x$.

15. Dibuja la gráfica de las siguientes funciones:

a) $f(x) = e^{1/x}$, *b)* $f(x) = x\ln(x)$, *c)* $f(x) = x + 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$.

d) $f(x) = 4x + x^{\frac{7}{2}}$; *e)* $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x > 0 \\ -x^2 + 2x + 1, & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$; *f)* $f(x) = \frac{|x|}{e^{|x-1|}}$,

Para ello, tendrás que determinar los valores en los que las funciones están definidas, son continuas, derivables, etc. Luego, con la información de f' y f'', determina intervalos de crecimiento/decrecimiento, concavidad/convexidad, extremos locales (o relativos), puntos de inflexión, etc. Recuerda calcular, cuando sea necesario, los límites en los extremos de los dominios.

16. Dibuja la gráfica de la función $f(x) = x \cdot e^{-x}$.

Sobre polinomios y series de Taylor

17. Halla los polinomios de Taylor de grados 1 y 2 para $f(x) = \sqrt{x}$ en $a = 16$ y estima sin calculadora el error cometido al utilizarlos como aproximación de $\sqrt{16.2}$. Comprueba después, con ayuda de una calculadora, la precisión de dicha estimación. Con una estrategia similar, encuentra también aproximaciones sencillas de e y de $\ln 0.8$.

18. Halla los polinomios de Taylor de grado 3 en $a = 0$ para las siguientes funciones

a) $f(x) = \ln(1 + \operatorname{sen} x)$, *b)* $f(x) = \dfrac{1}{3 + e^x}$, *c)* $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)$.

19. Estudia para qué valores de x convergen las series de Taylor (en $a = 0$) de las funciones

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

20. Halla la serie de Taylor de la función $f(x) = (x^2 - 3x)e^{x^4}$ en $a = 0$ a partir de la de e^x y úsala para hallar $f^{(5)}(0)$ y $f^{(10)}(0)$.

21. Halla las series de Taylor en $a = 0$ de las siguientes funciones, indicando dónde convergen:

a) $f(x) = x\ln(1 + x^2)$, *b)* $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(x^3)$, *c)* $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.