FUNCIONES ELEMENTALES: PROPIEDADES Y GRÁFICAS

1. Para cada una de las funciones dadas abajo, halla su dominio de definición.

$$f(x) = \sqrt{x^2-4}\,; \quad g(x) = \frac{x+4}{x^2-4x+3}\,; \quad F(x) = \frac{x+4}{\sqrt{x^2-4x+3}}\,; \quad G(x) = \log(x^2-1)\,.$$

2. Esboza la gráficas de las siguientes funciones:

$$f(x) = |x| + 3\,; \quad g(x) = |x-2|\,; \quad h(x) = -\sqrt{x-2}\,;$$
$$F(x) = 2\cos x + 1\,; \quad u(x) = \cos\frac{x}{2}\,, \quad v(x) = \frac{e^x}{2}\,.$$

3. Para cada una de las siguientes funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, determina su imagen (recorrido) y si es inyectiva o sobreyectiva:

$$f(x) = |e^x - 2|\,, \qquad g(x) = x^3 + 1\,, \qquad h(x) = \log(x^2+1)\,.$$

4. Explica razonadamente si el conjunto de todos los puntos en el plano que satisfacen la ecuación: (a) $y^2 = x^2$; (b) $y^3 = x$ es la gráfica de una función $y = f(x)$ o no.

5. Observando la gráfica de $f(x) = e^x$, deduce la desigualdad $1 + x \le e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

6. Decide razonadamente si es par o impar cada una de las siguientes funciones:

$$f(x) = \sqrt{x^2-4}\,; \quad g(x) = x^2 - 4x\,; \quad u(x) = x^5 - 3x\,; \quad v(x) = \cos(\pi x)\,.$$

LÍMITES DE FUNCIONES

7. Comprueba formalmente (o bien utilizando las sucesiones o bien usando la definición formal con ϵ–δ):

$$(a)\ \lim_{x\to -2} 3x = -6; \qquad (b)\ \lim_{x\to 5} \sqrt{x-4} = 1\,.$$

8. Calcular los siguientes límites (sin usar la regla de L'Hopital, que se verá más adelante):

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to -1} \frac{x^2+x+2}{x-1}\,; \quad \text{(b)}\ \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1}\,; \quad \text{(c)}\ \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}\,; \quad \text{(d)}\ \lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}\,.$$

9. Estudia la existencia de los límites laterales en los puntos $x = 0$ y $x = 3$ de las funciones definidas como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x > 0, \\ -x, & \text{si } x \le 0, \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} 2e, & \text{si } x > 3, \\ e^x, & \text{si } 0 < x \le 3, \\ -x+1, & \text{si } x \le 0. \end{cases}$$

Continuidad de funciones

10. Estudia la continuidad en los puntos $x = 0$ y $x = 3$ de las funciones consideradas en el ejercicio anterior.

11. Para cada una de las siguientes funciones, decide razonadamente si es continua o no (en su caso, por la derecha o por la izquierda) en el punto $x = 1$:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}+5}{\sqrt{x-1}-2}\,, \qquad g(x) = \ln(x-1)\,, \qquad h(x) = \sqrt[3]{x-1}\,.$$

12. Determina todos los puntos de continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|}\,\operatorname{sen}\frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$

13. Halla todos los puntos de continuidad de la función $h(x) = \sqrt{-x^2+7x-6}$.

14. Dibuja la gráfica y estudia la continuidad de las siguientes funciones. El símbolo $[x]$ denota la parte entera de x, es decir, el mayor entero menor o igual que x:

a) $f(x) = [x]$ b) $f(x) = x - [x]\,;$ c) $f(x) = \sqrt{x-[x]}\,;$ d) $f(x) = \left[\dfrac{1}{x}\right].$

Aplicaciones del teorema de Bolzano

15. Demostrar que cada una de las siguientes funciones tiene un cero en el intervalo $[0,1]$:

$$f(x) = -x^4+8x-6\,; \qquad g(x) = e^{3x^2}-1\,; \qquad h(x) = \frac{x^4-3\sqrt{x}+1}{x^5+6x+1}\,.$$

16. Demostrar que la ecuación $\cos x - \frac{10x}{\pi} = -e$ tiene solución en el intervalo $(0, \pi/2)$.

17. Prueba que, si $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ es continua, entonces existe al menos un valor $x_0 \in [0,1]$ que queda fijo, es decir, tal que $f(x_0) = x_0$.

18. Prueba que al calentar un aro siempre existen dos puntos diametralmente opuestos a la misma temperatura. *Indicación*: Considérese $f(\alpha) = T(\alpha) - T(\alpha+\pi)$ donde $T(\alpha)$ es la temperatura en función del ángulo en radianes. ¿Qué relación hay entre $f(\alpha)$ y $f(\alpha+\pi)$?