Sucesiones

1. Escribe los cinco primeros términos de las sucesiones cuyos términos generales son:

$$a_n = (-1)^n + 2\,, \qquad b_n = 2^{-n+1}\,, \qquad c_k = \frac{k-1}{k+1}\,.$$

2. Halla la fórmula para a_n, sabiendo que los primeros términos de la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ son:

(a) $1, 4, 9, 16, 25, 36$; (b) $1, 3, 1, 3, 1, 3$; (c) $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \frac{1}{720}$; (d) $1, -\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \frac{16}{81}$.

Convergencia/divergencia de sucesiones y límites

3. ¿Cuáles de las sucesiones cuyos términos generales vienen escritos más abajo son convergentes? Explica la respuesta usando la definición.

$$a_n = \frac{1}{2^n}\,; \qquad b_n = \sqrt{n}\,; \qquad c_n = 3 + (-1)^n\,.$$

4. Comprueba que las siguientes sucesiones divergen. Estudia si tienden a uno de los símbolos $+\infty$ o $-\infty$, o si son "oscilantes".

$$a_n = \frac{n^3}{10n^2 + 2009}\,; \qquad b_n = -n^2\,; \qquad c_n = \frac{1 + (-1)^n}{3 - (-1)^n}\,; \qquad d_n = (-2)^n\,.$$

5. Teniendo en cuenta los límites básicos vistos en clase, halla los siguientes límites y explica la respuesta:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} 0,2011^n$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-5)^n}{12^{n+1}}$; (c) $\lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^k$; (d) $\lim\limits_{k\to\infty} e^{1/(k+1)}$.

6. Aplicando el teorema del encaje visto en clase, deduce la existencia y halla el valor de los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n!}$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2\cos(3n) + 5\,\mathrm{sen}(n^2)}{n+1}$; (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 2^{-n} + \cos(n!)}{\sqrt{n}}$.

Cálculo de límites

7. Estudia si los términos generales que se indican dan lugar a sucesiones convergentes y, en caso afirmativo, halla su límite.

a) $a_n = \frac{3n^4 - 2}{n^4 + 2n^2 + 2}$, *b)* $a_n = \frac{8n^2 - 7n}{2n^3 + 5}$ *c)* $a_n = \sqrt{n^2+1} - n$,

d) $a_n = n\sqrt{n^2+1} - n^2$, *e)* $a_n = \frac{4^n}{5^n + 6^n}$, *f)* $a_n = \frac{6^n}{5^n + (-6)^n}$,

8. Determina los siguientes límites:

$$\text{(a)} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n^3} \qquad \text{(b)} \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{\frac{3}{2}} + \pi^{-1/n}\right) \qquad \text{(c)} \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[2n]{e} + e^{-n}\right)$$

$$\text{(d)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \qquad \text{(e)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{2n} \qquad \text{(f)} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n$$

(Sugerencia: para los tres últimos, recuerda que $\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n = e$).

Propiedades generales de la convergencia

9. Da en cada apartado un ejemplo de una sucesión que tenga las propiedades que se afirman:

a) La sucesión $(|a_n|)_{n=1}^{\infty}$ es monótona y acotada, pero $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ no converge.

b) La sucesión $(b_{n+1}/b_n)_{n=1}^{\infty}$ converge, pero $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ no converge.

10. Sean a_n y b_n dos sucesiones acotadas superiormente y A y B sus respectivos supremos. Consideremos también $c_n = a_n + b_n$ y llamemos C a su supremo.

a) ¿Se cumple siempre $A + B \geq C$?

b) ¿Se cumple $A + B = C$ si a_n y b_n son crecientes?

c) ¿Se cumple siempre $A + B = C$?

Sucesiones definidas por recurrencias

11. Consideremos la sucesión definida por $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ para cada $n \geq 1$, con $a_1 = 1$.

a) Prueba por inducción que $a_n < 2$ para todo n.

b) Justifica que la sucesión (a_n) es monótona creciente y halla su límite.

c) Una forma alternativa de resolver los apartados anteriores es calcular una fórmula exacta para a_n. Intenta hallarla.

(Este ejercicio da sentido a la expresión $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\ldots}}}$, que formalmente es el resultado de iterar indefinidamente la sucesión antes indicada, y por tanto se le debe asignar el valor de su límite.)

12. Fijado $1 < t \leq 4$ consideramos la sucesión recurrente dada por

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{t}{x_n}\right) \quad \text{para } n \geq 1.$$

a) Prueba que esta sucesión está acotada inferiormente por $\sqrt{t}$ y superiormente por 2. *Indicación*: $(a+b)^2 \geq 4ab$ para $a, b \geq 0$.

b) Demuestra que es monótona decreciente. Deduce que $\lim x_n = \sqrt{t}$.

13. Considera la sucesión $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ dada por

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_n = \frac{3}{2}a_{n-1} - \frac{1}{2}a_{n-2} \quad \text{para cada } n \geq 2.$$

a) Prueba que la sucesión es creciente.

b) El apartado anterior nos dice que $a_n \geq 2$ si $n \geq 3$. Comprueba numéricamente que $a_n < 3$ para "todo" n y que de hecho 3 "parece" ser el límite de la sucesión. ¿Es fácil probar ese hecho por inducción?

b) Observa cómo se simplifica todo si nos dicen que el término general de la sucesión se escribe como $a_n = 3 - 1/2^{n-1}$. Comprueba primero que es así, y calcula luego el límite de la sucesión.