Repaso de valores absolutos, ecuaciones y desigualdades

1. Indica los valores $x \in \mathbb{R}$ para los que se satisfacen las siguientes *igualdades*:

a) $x^2 - 10x + 21 = 0$,
b) $x^2 + 2 = 4x$,
c) $x^4 - 4 = 0$,
d) $\sqrt{1 + x^3} = 3$,
e) $-1 + \cos x = 0$,
f) $\log \frac{x-e}{e} = 0$.

2. Encuentra todos los valores $x \in \mathbb{R}$ que satisfagan las siguientes *desigualdades*:

a) $|4x + 3| \leq 1$,
b) $|x + 1| \leq |x - 1|$,
c) $|x^2 - 5x + 6| < 2$,
d) $|x + 1| + |x + 3| < 5$,
e) $\dfrac{x - 1}{(x + 2)(x - 3)} > 0$,
f) $\dfrac{x^2 - 2}{x^2 - 4} \leq 0$,
g) $\dfrac{x^2 + 4}{x^2 - 2x} > 0$,
h) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} < 1$.

3. Decide si las siguientes desigualdades son válidas para los valores de x e y que se indican:

a) $|x - y| \leq |x| + |y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.
b) $|x - y| \leq |x| - |y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.
c) $x^2 - x + 1 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
d) $x^4 + \dfrac{1}{x^4} \geq 2$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

Inducción

4. Demuestra por inducción las siguientes fórmulas:

a) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.
b) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n + 1) = \dfrac{1}{3} n(n + 1)(n + 2)$.
c) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$.

5. Demuestra por inducción las siguientes afirmaciones:

a) $2^n > n^2$, para todo $n \geq 5$.
b) *Desigualdad de Bernoulli:* $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, para todo $x \geq -1$, $n \geq 1$.
c) $\cos 2nx = P_n(\cos x)$, para todo $n \geq 1$ y cierto polinomio P_n (cuyo grado depende de n).

6. Para cada uno de los conjuntos dados abajo, indica una cota superior y una inferior. Luego determina razonadamente el ínfimo y el supremo de cada uno de ellos.

a) $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\}$,

b) $\{\cos x + 1 : x \in \mathbb{R}\}$,

7. Indica si los siguientes conjuntos están acotados inferior y superiormente y, en su caso, halla el ínfimo y el supremo.

a) $\{x \in \mathbb{R} \, : \, |x-3| < 1\}$,

b) $\{x \in \mathbb{R} \, : \, x^5 < 32\}$,

c) $\{x^2 - 6x + 9 \, : \, x \in \mathbb{R}\}$,

d) $\{(-1)^n - n^{-1} \, : \, n \in \mathbb{Z}^+\}$.