Cálculo I (Grado en Ingeniería Informática) 2012-13

Examen convocatoria extraordinaria, 17 de junio de 2013

Notas y comentarios:

- Todos los problemas son de desarrollo y cada uno vale 2 puntos.
- Un par de primitivas:

$$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\,\ln|ax+b| + C\,, \qquad \int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\,\arctan(x/a) + C\,.$$

- Fórmula de la derivada de la función inversa:

$$(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(f^{-1}(a))}.$$

---

1. La sucesión (a_n) viene definida de forma recurrente como sigue:

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \quad \text{para cada } n \geq 0.$$

(a) Demuestra, por inducción, que $1 \leq a_n < 2$ para todo $n \geq 0$.

Solución. Probamos primero, por inducción, que $a_n \geq 1$ para todo $n \geq 0$. La condición se cumple para el primer término, pues $a_0 = 1$. Supongamos que $a_n \geq 1$ para un cierto n. Argumentamos ahora para el siguiente término de la sucesión, a_{n+1}:

$$a_{n+1} \overset{\text{recurrencia}}{=} \sqrt{a_n + 2} \overset{\text{hip. inducción}}{\geq} \sqrt{3} > 1.$$

Para probar que $a_n < 2$ para todo $n \geq 0$ se procede de igual manera. La condición se cumple para el primer término, pues $a_0 = 1$. Supongamos que $a_n < 2$ para un cierto n. Argumentamos ahora para el siguiente, a_{n+1}:

$$a_{n+1} \overset{\text{recurrencia}}{=} \sqrt{a_n + 2} \overset{\text{hip. inducción}}{<} \sqrt{4} = 2.$$

(b) Supongamos que la sucesión (a_n) tiene un límite L. Calcula el valor de L.

Solución. Si L es el límite de la sucesión, entonces deberá cumplir que

$$L = \sqrt{L+2}, \quad \text{o lo que es lo mismo,} \quad L^2 - L - 2 = 0.$$

Esta ecuación de segundo grado tiene dos soluciones, $L = 2$ y $L = -1$. Obviamente, la primera es la respuesta correcta.

2. Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} |x+1| & \text{si } x \leq 0, \\ 2\cos(7x - \pi) + |a| & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Determina (razonadamente) para qué valores del parámetro a la función $f(x)$ es continua.

Solución. Para $x \neq 0$, la función es continua (sea cual sea el valor de a), pues las dos expresiones son composiciones de funciones continuas. Veamos qué pasa en $x = 0$.

- Para empezar, $f(0) = |0 + 1| = 1$.
- Para el límite por la izquierda,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} |x + 1| = \lim_{x \to 0^-} (x + 1) = 1.$$

- Y por la derecha, como $\cos(-\pi) = -1$,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 2\cos(7x - \pi) + |a| = -2 + |a|.$$

La conclusión es que $f(x)$ será continua en $x = 0$ si $|a| = 3$, lo que nos da dos soluciones: $a = 3$ y $a = -3$.

3. (a) Estudia los máximos y mínimos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

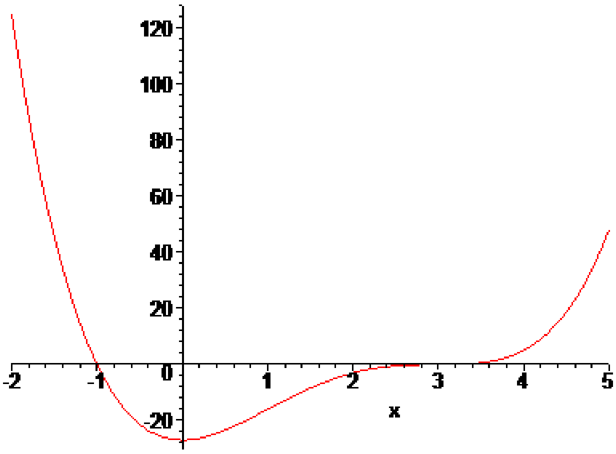
$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 27\,.$$

Solución. Derivamos e igualamos a 0,

$$f'(x) = 0 \iff 4x^3 - 24x^2 + 36x = 0 \iff 4x(x^2 - 6x + 9) = 0 \iff 4x(x-3)^2 = 0.$$

Las soluciones son $x = 0$ y $x = 3$ (doble). La derivada es negativa si $x < 0$ (ahí la función será decreciente), y es positiva si $x > 0$ (la función será creciente). El punto $x = 0$ es un mínimo, pero $x = 3$ es un punto de inflexión.

(b) Esboza la gráfica de la función.



4. (a) Calcula el valor de la integral $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + 5x + 4}\, dx$, explicando el procedimiento utilizado.

SOLUCIÓN. Usaremos fracciones simples. Hallamos los ceros del denominador,

$$x^2 + 5x + 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -1, x = -4,$$

lo que nos dice que $x^2 + 5x + 4 = (x+1)(x+4)$. Ahora escribimos

$$\frac{1}{(x+1)(x+4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+4} = \frac{A(x+4) + B(x+1)}{(x+1)(x+4)}.$$

Igualando coeficientes en el numerador resolviendo el sistema de dos ecuaciones, llegamos a que $A = 1/3$ y $B = -1/3$. El resto es ya directo:

$$\int \frac{1}{x^2 + 5x + 4}\, dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+1}\, dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+4}\, dx = \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{3} \ln|x+4| + C.$$

(b) Calcula el valor de la integral impropia $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\, e^{-x}\, dx.$

SOLUCIÓN. Integramos por partes:

$$\int_0^{+\infty} \underbrace{x}_{=u} \underbrace{e^{-x}\, dx}_{=dv} = -xe^{-x}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x}\, dx = -e^{-x}\Big|_0^{\infty} = 1,$$

donde hemos usado que

- $\lim\limits_{x\to 0}(-xe^{-x}) = 0, \quad \lim\limits_{x\to\infty}(-xe^{-x}) = 0, \quad \lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = 0, \quad \lim\limits_{x\to 0} e^{-x} = 1.$

5. (a) Encuentra razonadamente los máximos y mínimos locales de la función

$$F(x) = \int_1^x \frac{t^2 - 4}{t^4 + 2} dt\,.$$

SOLUCIÓN. Por el teorema fundamental del Cálculo,

$$F'(x) = \frac{x^2 - 4}{x^4 + 2},$$

de manera que las soluciones de $F'(x) = 0$ son $x = 2$ y $x = -2$. Se deduce que $x = 2$ es un mínimo y $x = -2$ un máximo, bien estudiando el signo de la derivada en cada uno de los tres intervalos de interés ($x < -2$, $-2 < x < 2$ y $x > 2$), bien estudiando el signo de la segunda derivada de F en $x = 2$ y $x = -2$.

(b) Calcula $\left(F^{-1}\right)'(0)$.

SOLUCIÓN. Basta aplicar la fórmula

$$(F^{-1})'(0) = \frac{1}{F'(F^{-1}(0))} = \frac{1}{F'(1)} = \frac{1+2}{1-4} = -1,$$

donde hemos usado que $F^{-1}(0) = 1$, pues

$$F(1) = \int_1^1 \frac{t^2 - 4}{t^4 + 2} dt = 0,$$

y la expresión para $F'(x)$.