Cálculo I (Grado en Ingeniería Informática) 2012-13

Examen final, enero de 2013

PUNTUACIÓN DEL EXAMEN:

P. 1	P. 2	P. 3	P. 4	P. 5	TOTAL

Inicial del primer apellido: ________

NOMBRE: __________________________

APELLIDOS: ____

D.N.I. O PASAPORTE: ________________________________

FIRMA: ____

Notas y comentarios:

- Todos los problemas son de desarrollo.
- Algunas derivadas útiles:

$$(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}\,, \qquad (\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

- Algunas series de Taylor útiles:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots\,,\ |x| < 1\,, \qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\,,\ x \in \mathbb{R}\,,$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\,,\ x \in \mathbb{R}\,, \qquad \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\,,\ x \in \mathbb{R}\,.$$

- Teorema de Bolzano: Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$. Si $f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signo, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.
- Teorema del valor medio: Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = (f(b) - f(a))/(b-a)$. (El caso especial cuando $f(a) = f(b)$ y $f'(c) = 0$ es el teorema de Rolle.)

---

1. (a) Determina razonadamente el valor del límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^{3/2}+4n+7}{2n\sqrt{n}+11}\,.$$

(b) Decide si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^2)+2}{n\sqrt{n}}$$

diverge o converge absoluta o condicionalmente. Razona tu respuesta.

2. (a) Estudia el dominio de definición de la función

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

y su comportamiento en los extremos del dominio.

(b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f y sus puntos de máximo y/o mínimo.

3. Sea $g(x) = e^{-x^3}$, para $x \in \mathbb{R}$.

(a) Escribe el polinomio de Taylor de g en torno a $x = 0$ de grado 12.

(b) Determina el valor de $g^{(15)}(0)$, razonando la respuesta.

4. (a) Calcula el valor de la integral $\int_0^1 x\, e^x\, dx$, explicando el procedimiento usado.

(b) Calcula razonadamente la integral $\int \frac{x^3 \operatorname{arc\,tg}(x^4)}{1+x^8}\, dx$.

5. (a) Sea
$$f(x) = \int_0^{x^2} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt\,.$$
Calcula $f'(x)$. ¿Qué teorema(s) justifican el cálculo?

(b) Utiliza el apartado anterior para calcular razonadamente el siguiente límite:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{x^2} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt}{x^2}\,.$$