Cálculo I (Grado en Ingeniería Informática) 2012-13

Examen final, enero de 2013

Notas y comentarios:

- Todos los problemas son de desarrollo.
- Algunas derivadas útiles:

$$(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}\,, \qquad (\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

- Algunas series de Taylor útiles:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots\,, \ |x| < 1\,, \qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\,, \ x \in \mathbb{R}\,,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\,, \ x \in \mathbb{R}\,, \qquad \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\,, \ x \in \mathbb{R}\,.$$

- Teorema de Bolzano: Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$. Si $f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signo, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.
- Teorema del valor medio: Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = (f(b) - f(a))/(b-a)$. (El caso especial cuando $f(a) = f(b)$ y $f'(c) = 0$ es el teorema de Rolle.)

---

1. (a) Determina razonadamente el valor del límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^{3/2} + 4n + 7}{2n\sqrt{n} + 11}\,.$$

SOLUCIÓN. Observa que $n\sqrt{n} = n^{3/2}$. Ahora, dividimos arriba y abajo por $n^{3/2}$, la potencia de mayor grado:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^{3/2} + 4n + 7}{2n^{3/2} + 11} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 + \frac{4}{n^{1/2}} + \frac{7}{n^{3/2}}}{2 + \frac{11}{n^{3/2}}} = \frac{3}{2}.$$

(b) Decide si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^2) + 2}{n\sqrt{n}}$$

diverge o converge absoluta o condicionalmente. Razona tu respuesta.

SOLUCIÓN. Observa primero que todos los términos de la serie son positivos, pese a la presencia del coseno, porque, para cualquier n,

$$-1 \le \cos(n^2) \le 1\,, \qquad \text{de manera que} \qquad 1 \le \cos(n^2) + 2 \le 3.$$

Como el numerador está acotado superiormente (por 3), tenemos que, para todo $n \ge 1$,

$$\frac{\cos(n^2) + 2}{n\sqrt{n}} \le \frac{3}{n\sqrt{n}}.$$

Finalmente, como la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n\sqrt{n}} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

converge (la potencia del denominador es $3/2 > 1$), deducimos que la serie original converge, por comparación.

2. (a) Estudia el dominio de definición de la función

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

y su comportamiento en los extremos del dominio.

SOLUCIÓN. Si $1-x^2<0$, la raíz cuadrada no está definida. Y el caso $1-x^2=0$ está también prohibido, por estar en el denominador. Así que la función solo está definida para los valores de x que cumplan

$$1-x^2>0 \implies x^2<1 \implies -1<x<1.$$

En los extremos,

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty, \qquad \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty.$$

(b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f y sus puntos de máximo y/o mínimo.

SOLUCIÓN. Hallamos una expresión para la derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{1-x^2} - x^2\frac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{2x(1-x^2)+x^3}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{2x-x^3}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{x(2-x^2)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

Escrita así, es directo comprobar que los ceros de la derivada están en $x=0$ y $x=\pm\sqrt{2}$ (pero estos últimos están fuera del dominio de la función $f(x)$).

En cuanto al signo de $f'(x)$ (que nos dará los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$), observa primero que el denominador es siempre positivo (pues solo estamos trabajando en $1-x^2>0$). Como $x^2<1$, el factor $2-x^2$ es siempre >1 en el rango considerado, y por tanto positivo. Así que el signo de $f'(x)$ viene determinado simplemente por el de x. De manera que $f'(x)<0$ si $-1<x<0$ (la función será decreciente ahí), mientras que $f'(x)>0$ si $x>0$.

Con todo este análisis (de los apartados a) y b)), no te costará mucho esbozar la gráfica de $f(x)$.

3. Sea $g(x)=e^{-x^3}$, para $x\in\mathbb{R}$.

(a) Escribe el polinomio de Taylor de g en torno a $x=0$ de grado 12.

SOLUCIÓN. Como exhibíamos al principio, para cualquier $x\in\mathbb{R}$,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

Así que

$$e^{-x^3} = 1 + (-x^3) + \frac{(-x^3)^2}{2!} + \frac{(-x^3)^3}{3!} + \frac{(-x^3)^4}{4!} + \frac{(-x^3)^5}{5!} \cdots = 1 - x^3 + \frac{x^6}{2!} - \frac{x^9}{3!} + \frac{x^{12}}{4!} - \frac{x^{15}}{5!} \cdots$$

El polinomio de Taylor pedido es $P(x) = 1 - x^3 + \dfrac{x^6}{2!} - \dfrac{x^9}{3!} + \dfrac{x^{12}}{4!}$.

(b) Determina el valor de $g^{(15)}(0)$, razonando la respuesta.

SOLUCIÓN. El coeficiente que acompaña a x^{15} en el desarrollo de $g(x)=e^{-x^3}$ viene dado, según la fórmula de Taylor, por

$$\frac{g^{(15)}(0)}{15!}.$$

Pero acabamos de ver que ese coeficiente es $-1/5!$. De manera que $g^{(15)}(0) = -15!/5!$.

4. (a) Calcula el valor de la integral $\displaystyle\int_0^1 x\,e^x\,dx$, explicando el procedimiento usado.

Solución. Integramos por partes, tomando $u = x$ y $dv = e^x\,dx$ (por lo que $du = dx$ y $v = e^x$):

$$\int_0^1 x\,e^x\,dx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = e - \left(e^x\Big|_0^1\right) = e - (e-1) = 1.$$

(b) Calcula razonadamente la integral $\displaystyle\int \frac{x^3\ \operatorname{arc\,tg}(x^4)}{1+x^8}\,dx.$

Solución. Podemos empezar con un cambio de variable $x^4 = u$ (para el que $4x^3dx = du$), que nos dice que

$$\int \frac{x^3\ \operatorname{arc\,tg}(x^4)}{1+x^8}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{\operatorname{arc\,tg}(u)}{1+u^2}\,du.$$

Ahora, como $1/(1+u^2)$ es la derivada de $\operatorname{arc\,tg}(u)$, hacemos el cambio de variables $t = \operatorname{arc\,tg}(u)$, que nos da

$$\frac{1}{4}\int \frac{\operatorname{arc\,tg}(u)}{1+u^2}\,du = \frac{1}{4}\int t\,dt = \frac{1}{8}t^2 + C.$$

Deshaciendo los cambios, concluimos que

$$\int \frac{x^3\ \operatorname{arc\,tg}(x^4)}{1+x^8}\,dx = \frac{\operatorname{arc\,tg}^2(x^4)}{8} + C.$$

Comprueba que la derivada de la última expresión es, justamente, $\frac{x^3\ \operatorname{arc\,tg}(x^4)}{1+x^8}$. Alternativamente, se puede cambiar a $u = \operatorname{arc\,tg}(x^4)$, de manera que $du = \frac{4x^3}{1+x^8}\,dx$, y la integral sale en un solo paso.

5. (a) Sea

$$f(x) = \int_0^{x^2} \frac{\operatorname{sen} t}{t}dt\,.$$

Calcula $f'(x)$. ¿Qué teorema(s) justifican el cálculo?

Solución. Como el integrando es una función continua, el Teorema Fundamental del Cálculo (y la regla de la cadena) nos dice que

$$f'(x) = \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}\,2x = 2\,\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x}.$$

(b) Utiliza el apartado anterior para calcular razonadamente el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{x^2} \frac{\operatorname{sen} t}{t}dt}{2x}\,.$$

Solución. Aplicamos la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{x^2} \frac{\operatorname{sen} t}{t}dt}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} = 1$$

(véanse las notas introductorias para el último límite).