Análisis Matemático I, 2010-11

(1º de Grado en Tecnología y Servicios de Ingeniería de Telecomunicación)

Apuntes sobre series de potencias: preguntas frecuentes y ejemplos resueltos

Preguntas frecuentes.

P-1. ¿Cuál es la diferencia entre una serie numérica y una serie funcional?

Respuesta. Los términos de una serie numérica son números (reales, en nuestro caso), como en cualquiera de los ejemplos de series vistos antes. Los términos de una serie funcional son funciones, por ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} .$$

Por supuesto, para cualquier valor concreto (especial) de x, una serie funcional se convierte en una serie numérica. Por ejemplo, para $x = 1/2$, las series de arriba se convierten en

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n2^{-n})}{n^2} ,$$

respectivamente, mientras que otros valores de x nos darían otras series. Por tanto, normalmente entendemos una serie funcional como una función definida para ciertos valores de x (y, tal vez, sin sentido para otros).

P-2. ¿Qué es una serie de potencias?

Respuesta. Es una serie funcional que tiene el siguiente tipo:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n , \quad a_n \in \mathbb{R} ,$$

o, más generalmente,

$$a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n , \quad a_n \in \mathbb{R} ,$$

Diremos que la segunda serie *está centrada en el punto* c, entendiendo que la primera está centrada en el origen ($c = 0$). Podemos pensar en estas series como en unas versiones generalizadas de los polinomios. En analogía con ellos, los números a_n se denominan los *coeficientes* de la serie de potencias.

Un ejemplo concreto sería la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Para cada valor concreto de x, se obtiene una serie numérica de tipo geométrico y con razón x. En este caso, los coeficientes son $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = 1$ y el centro $c = 0$.

Otro ejemplo es la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{n!} = 1 + (x+5) + \frac{(x+5)^2}{2} + \frac{(x+5)^3}{6} + \frac{(x+5)^4}{24} + \ldots$$

Ahora $a_n = 1/n!$, $n = 0,\ 1,\ 2, \ldots$ y $c = -5$.

P-3. En una serie de potencias, ¿el sumatorio va siempre desde $n = 0$?

Respuesta. No es imprescindible que la suma empiece con el índice $n = 0$; puede empezar en uno o en cualquier otro valor. Si la serie es, por ejemplo, $\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$, entendemos que $a_0 = a_1 = 0$.

P-4. ¿Es

$$\frac{1}{x-2} + 1 + (x-2)^2 + (x-2)^3 + (x-2)^4 + \dots$$

una serie de potencias de $x - 2$?

Respuesta. No, al igual que, por ejemplo, $\frac{1}{x} + 1 + x + x^2 + x^3$ no es un polinomio. Las potencias negativas de $x - c$ no deben aparecer en la suma, ni tampoco las raíces o similares.

P-5. ¿Para qué valores de x converge una serie de potencias?

Respuesta. Una serie de potencias normalmente:

- converge para todo x en un intervalo abierto, $(c - R, c + R)$, centrado en el punto c y denominado el *intervalo de convergencia*; es decir, converge para todo x tal que $|x - c| < R$,

- diverge para todo fuera del intervalo cerrado $[c - R, c + R]$; es decir, para todo x con $|x - c| > R$; - en los puntos $x = c \pm R$ puede ser tanto convergente como divergente; existen ejemplos para todas las combinaciones posibles pero no los estudiaremos aquí.

Por tanto, entendemos una serie de potencias como una función definida en su intervalo de convergencia y no le asignamos ningún significado en los x fuera de dicho intervalo.

Hay dos situaciones excepcionales:

- series de potencias que convergen para todo $x \in \mathbb{R}$, en cuyo caso entendemos que el radio de convergencia es $R = +\infty$;

- series que sólo convergen en $x = c$ (donde la suma de la serie es, obviamente, igual al termino constante, a_0) y divergen en todos los demás puntos, en cuyo caso entendemos que el radio es $R = 0$.

P-6. ¿Cómo calcular el radio de convergencia una serie de potencias?

Respuesta. Para calcular el valor del radio R sirve cualquiera de las siguientes fórmulas:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,, \qquad \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|\,,$$

siempre y cuando exista el límite en la fórmula que se quiera usar. La fórmula tiene su interpretación lógica también cuando $R = 0$ ó $R = +\infty$, entendiendo que $1/0 = +\infty$ y $1/(+\infty) = 0$.

P-7. ¿Qué operaciones útiles se pueden hacer con una serie de potencias?

Respuesta. Destacamos una.

Teorema. Una serie de potencias, entendida como función de x:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n\,,$$

es una función derivable en el intervalo de convergencia $(c - R, c + R)$. Su derivada se calcula término-por-término, como si fuera un polinomio:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n (x - c)^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - c)^{n-1}\,.$$

Obsérvese que el término constante a_0, correspondiente a $n = 0$, desaparece después de derivar.

Dado que la serie derivada f' sigue siendo una serie de potencias y puede comprobarse que converge exactamente en el mismo intervalo de convergencia $(c-R, c+R)$ que la inicial, podemos aplicar el procedimiento a la nueva serie y seguir derivando. Por tanto, una serie de potencias es una función infinitamente diferenciable en su intervalo de convergencia.

P-8. ¿Pueden escribirse otras funciones infinitamente diferenciables como series de potencias?

Respuesta. Sí. Por ejemplo, de nuestros conocimientos de las series geométricas y sus sumas sabemos que la función $1/(1-x)$ es igual a la suma de la serie geométrica con razón x en el intervalo $(-1, 1)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \qquad |x| < 1 .$$

Obsérvese que la función a la derecha está definida para todo $x \neq 1$; sin embargo, la serie a la izquierda sólo converge para $x \in (-1, 1)$ y, en ese intervalo, ambas coinciden; fuera de él, no tiene sentido hablar del desarrollo en potencias de x. Recordemos también un cálculo visto en clase o en las hojas de problemas: los polinomios de Taylor (en $c = 0$) de la función $1/(1-x)$ son precisamente:

$$P_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots x^n ,$$

las sumas parciales de la serie infinita de arriba.

Otras funciones infinitamente diferenciables en ciertos intervalos pueden representarse en forma de series de potencias; suele decirse que se *pueden desarrollar en series de potencias*. Para ello, tienen que cumplir alguna condición adicional aparte de ser infinitamente diferenciables. Cuando f es una función infinitamente diferenciable y cumple

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n , \qquad |x-c| < R ,$$

diremos también que la serie de potencias a la derecha es la *serie de Taylor de f centrada en $x = c$*. Puede comprobarse que sus términos son los mismos que aparecen en los polinomios de Taylor de f, es decir:

$$P_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n (x-c)^n .$$

(Es decir, lo que comentamos en el ejemplo de arriba sucede con otras funciones que se pueden escribir como series de potencias.) Por tanto, cada a_n se puede calcular como $a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$ pero no usaremos mucho esta fórmula ya que vamos a desarrollar directamente las funciones más relevantes.

P-9. ¿Para qué otras funciones infinitamente diferenciables se conoce su desarrollo en serie de Taylor?

Respuesta. Mencionamos tres ejemplos muy importantes: las funciones exponencial, seno y coseno, que se pueden desarrollar en series de potencias convergentes en todo $\mathbb{R}$ (es decir, con $R = +\infty$):

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots , \\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots , \\
\operatorname{sen} x &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots .
\end{aligned}$$

Otro ejemplo importante es

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \qquad -1 < x < 1\,.$$

Observemos que la función logarítmica a la izquierda está definida para todo $x > -1$, mientras que la serie sólo tiene sentido para los $x \in (-1, 1)$.

Ejemplos resueltos.

E-1. Calcular el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{(2n)!}$.

Solución. En este ejemplo, los coeficientes de la serie son $a_n = \dfrac{n^2}{(2n)!}$. Cuando aparecen los factoriales, es más cómodo usar la fórmula para el radio de convergencia con los cocientes:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{(n+1)^2}{(2(n+1))!}}{\frac{n^2}{(2n)!}} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{(2n)!}{(2(n+1))!} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$$

(¡ojo a la cancelación de factoriales más complicados!). En este producto, la primera fracción tiende a uno cuando $n \to \infty$ y la segunda, a cero. Por tanto, $1/R = 0$, lo cual significa que $R = +\infty$. La serie converge para todo x real.

E-2. Determinar el intervalo abierto más grande posible de x donde converja la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+1)^n}{2^n}$.

Solución. En este caso, $c = -1$ y $a_n = \dfrac{n}{2^n}$. Ahora es más cómodo aplicar la fórmula con la raíz ya que

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} \to \frac{1}{2}, \quad n \to \infty\,.$$

Puesto que $1/R = 1/2$, se sigue que $R = 2$. Luego la serie converge para los x que cumplen $|x+1| < 2$; es decir, $-2 < x+1 < 2$, lo cual es equivalente a $-3 < x < 1$. El intervalo más grande posible es $(-3, 1)$.

E-3. Desarrollar en serie la función $f(x) = x \operatorname{sen} x - \cos x$, indicando el intervalo de convergencia.

Solución. Usando los desarrollos conocidos para el seno y el coseno (convergentes para todo x), operamos con ellos, multiplicando, sumando y agrupando los términos similares:

$$\begin{aligned} x \operatorname{sen} x - \cos x &= x(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots) - (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots)\,. \\ &= (x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} + \dots) - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots\,. \\ &= -1 + \left(1 + \frac{1}{2}\right) x^2 - \left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) x^4 + \left(\frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}\right) x^6 - \dots \end{aligned}$$

La serie obtenida también tiene que ser convergente para todo x.

E-4. Lo mismo, para la función $f(x) = \ln \dfrac{1}{1-x}$.

Solución. Observando que $f(x) = -\ln(1-x)$, podemos usar el desarrollo de $\ln(1+x)$:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \qquad -1 < x < 1\,.$$

sustituyendo en él la x por $-x$:

$$f(x) = -\ln(1-x) = -\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (-x)^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (-1)^n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\,,$$

puesto que $(-1)^n \cdot (-1)^n = (-1)^{2n} = 1$. La serie converge, de nuevo, cuando $-1 < -x < 1$, es decir, cuando $-1 < x < 1$.

E-5. Calcúlese la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$ (cuando es convergente) y los valores de x para los que converge.

Solución. Observemos que $(n+1)x^n$ es la derivada de x^{n+1}. Utilizando esto, el teorema de derivación de las series de potencias, la suma de la serie geométrica y la regla del cociente (por este orden), obtenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} \right)' = \left(x \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' = \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}\,.$$

Preparado por:
Dragan Vukotić
Coordinador de la asignatura