Análisis Matemático I, 2010-11

(1º de Grado en Tecnología y Servicios de Ingeniería de Telecomunicación)

Apuntes sobre series numéricas: preguntas frecuentes y ejemplos resueltos

Preguntas frecuentes.

P-1. ¿Qué es una serie infinita (numérica)?

Respuesta. Una *serie infinita* es una suma infinita formal: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots$, donde $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales. Por ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \ldots, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots,$$

Los números a_n se denominan los *términos de la serie*. Los números n (que toman valores 1, 2, 3, etc.) se denominan *índices*, al igual que para las sucesiones.

Jamás debemos confundir la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Es decir, no es lo mismo la suma infinita

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \ldots$$

que la sucesión asociada

$$1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{25},\ \ldots$$

P-2. En una serie infinita, ¿importa qué letra que se utiliza para el índice?

Respuesta. Al igual que en una integral definida no importa la variable de integración, para una serie también da lo mismo si el índice de sumación se denota n, m, k ó j, mientras la notación sea coherente y no haya confusión. Es decir:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_j, \qquad 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Estaría mal escribir $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ (o similar) para la suma anterior. Eso significaría que $a_n = 1/k^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y no quedaría claro el valor de la constante k, es decir, en ese caso la suma sólo se podría entender como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2} + \ldots = +\infty.$$

P-3. ¿Consideramos siempre sólo las sumas que empiezan desde el índice uno, como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

Respuesta. No. A veces nos conviene considerar las sumas como

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots, \qquad \sum_{j=3}^{\infty} a_j = a_3 + a_4 + a_5 + \ldots.$$

Por ejemplo, tiene sentido escribir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \dots , \qquad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(n-2)} = \frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1}{3\cdot 2} + \frac{1}{4\cdot 3} + \dots$$

Obsérvese que, para la última serie, el término a_n ni siquiera existe cuando $n = 1$ ó $n = 2$ (pero sí existe para todos los demás índices $n \geq 3$).

P-4. ¿La suma de una serie siempre tiene sentido (como un número)?

Respuesta. Una serie en general es simplemente una expresión formal que puede tener una interpretación correcta o puede no tener sentido. Una de las preguntas fundamentales es precisamente la de distinguir entre las que tienen sentido (llamadas las series sumables o convergentes) y las que no tienen sentido (llamadas las series divergentes).

P-5. ¿Qué significa decir que una serie infinita converge (es sumable) o diverge?

Respuesta. En primer lugar, formamos las *sumas parciales* de la serie:

$$S_N = a_1 + a_2 + \ldots + a_N = \sum_{n=1}^{N} a_n \,.$$

Estas sumas son finitas y, por tanto, más fáciles de controlar. Así obtenemos una nueva sucesión $(S_N)_{N=1}^{\infty}$, siendo

$$S_1 = a_1\,,\ S_2 = a_1 + a_2\,,\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3\,,\ \ldots$$

Cuando N aumenta, añadimos cada vez más términos a la suma, "acercándonos" en el límite a lo que podríamos considerar como la suma infinita. Por tanto, tiene sentido preguntarse si esta sucesión $(S_N)_{N=1}^{\infty}$ tiene límite finito o no. Si lo tiene, diremos que la serie inicial $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge* (o que es *sumable*). En ese caso, la *suma de la serie* es el número

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} S_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n \,.$$

Si $\lim_{N\to\infty} S_N$ no existe o existe como uno de los símbolos $+\infty$, $-\infty$, diremos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es *divergente*.

Comentario. Si tratamos con una serie que no empieza en $n = 1$, ajustamos las sumas parciales. Por ejemplo, para la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ podemos definir

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots a_N \,.$$

P-6. ¿Cómo podemos saber si una serie arbitraria converge o diverge?

Respuesta. No podemos. Existen algunas series cuyas sumas parciales y sus límites pueden determinarse de forma explícita; aprendemos a reconocerlas. Ejemplos de tales series son las llamadas geométricas y telescópias.

También existen numerosos teoremas (denominados criterios de convergencia) que, para determinadas series, nos ayudan a deducir que convergen y, para otras, que divergen, pero no existe ningún criterio universal que valga para decidir la convergencia o divergencia de todas las series posibles; cada criterio vale sólo para una pequeña clase de series. En este curso sólo nos limitaremos a unas pocas series muy especiales y a los aspectos computacionales, con lo cual no estaremos tan interesados en el problema general de decidir la convergencia.

P-7. ¿Qué dice el criterio del término general para la convergencia de una serie?

Respuesta. El criterio dice lo siguiente:

Teorema (*Criterio del término general*). Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
(Dicho de una manera menos formal, para que la serie converja, su término general debe ser "pequeño").

Demostración. Si la serie converge, entonces $S_N N \to S$, un límite finito, cuando $N \to \infty$, luego también $S_{N-1} \to S$. Por tanto,

$$a_N = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{N-1} + a_N) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{N-1}) = S_N - S_{N-1} \to S - S = 0\,, \quad N \to \infty\,.$$

Por tanto, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

He aquí otro enunciado equivalente del mismo criterio: si a_n o bien no tiene límite o bien tiene límite distinto de cero, se deduce que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

Por ejemplo, podemos ver inmediatamente que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1+1-1+1-1+\ldots$ es divergente: $a_n = (-1)^n$, una sucesión que, como ya sabemos, no tiene límite.

Lo que el criterio NO dice es que si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Eso es falso porque existen ejemplos de series tanto convergentes como divergentes con $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Por ejemplo, es conocido para las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

que la primera converge (y tiene la suma $\pi^2/6$) mientras que la segunda diverge. En ambos casos, es inmediato que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Por tanto, si los términos de una serie cumplen la condición $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, no podemos deducir nada acerca de su convergencia del criterio del término general.

P-8. ¿Qué es una serie telescópica?

Respuesta. Es una serie en cuyas sumas parciales se producen muchas cancelaciones; por tanto, sus sumas parciales son fáciles de calcular. Por ejemplo, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$$

es telescópica porque $\ln \frac{n}{n+1} = \ln n - \ln(n+1)$, luego

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \ln \frac{n}{n+1} &= \sum_{n=1}^{N} (\ln n - \ln(n+1)) \\
&= (\ln 1 - \ln 2) + (\ln 2 - \ln 3) + (\ln 3 - \ln 4) + \ldots + (\ln(N-1) - \ln N) + (\ln N - \ln(N+1)) \\
&= \ln 1 - \ln(N+1) = -\ln(N+1) \to -\infty\,, \quad N \to \infty\,.
\end{aligned}$$

Puesto que las sumas parciales no tienen límite finito, concluimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$ es divergente.

Obsérvese que no nos hubiera ayudado el Criterio del término general para deducir la divergencia puesto que $n/(n+1) \to 1$ cuando $n \to \infty$ y, por tanto, $\ln \frac{n}{n+1} \to 0$ cuando $n \to \infty$, luego no podemos deducir directamente ni la convergencia ni la divergencia por dicho criterio.

P-9. ¿Qué es una serie geométrica?

Respuesta. Es una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ donde

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

para cierto número fijo q denominado la *razón* de la serie. Una serie geométrica siempre se puede escribir como

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots$$

donde a es su término inicial.

Por ejemplo, dada la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-\frac{1}{2})^n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots\,,$$

vemos que el cociente de cada término con el término anterior es igual exactamente a $-1/2$. Por tanto, la serie es geométrica con $a = 1$ y $q = -1/2$.

P-9. ¿Cuándo converge una serie geométrica y cómo se calcula su suma?

Respuesta. Aunque no existe un criterio universal para todas las series posibles, para las geométricas sí existe un criterio claro. Esto se así porque las sumas parciales en este caso también se pueden calcular.

Teorema (*Criterio de convergencia para las series geométricas*). La serie $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ converge si y sólo si $|q| < 1$; es decir, si y sólo si $-1 < q < 1$. Si este es el caso, la suma de la serie se calcula según la fórmula

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}\,.$$

Demostración. Ahora debemos definir las sumas parciales de la serie como

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} aq^n = a + aq + aq^2 + \ldots aq^N\,.$$

Es fácil ver que, cuando $q = 1$, las sumas parciales son $S_N = (n+1)a$ y, por tanto, divergen, salvo en el caso $a = 0$ que no tiene ningún interés.

Cuando $q \neq 1$, observando que la multiplicación por $(1-q)$ produce muchas cancelaciones, vemos que

$$(1-q)S_N = (1-q)(a+aq+aq^2+\ldots aq^N) = a+aq+aq^2+\ldots aq^N-(aq+aq^2+\ldots aq^N+aq^{N+1}) = a-aq^{N+1}\,.$$

Puesto que podemos dividir por $1-q$, vemos que

$$S_N = a\frac{1-q^{N+1}}{1-q}$$

Según algunos ejemplos importantes de límites (vistos antes en clase), la sucesión $(q^{N+1})_{N=1}^{\infty}$ diverge si $|q| > 1$ y también si $q = -1$; si $|q| < 1$, entonces $\lim_{N\to\infty} q^{N+1} = 0$. Esto nos lleva a la conclusión de que las sumas parciales S_N de la serie geométrica convergen si y sólo si $|q| < 1$ y que, en ese caso, su límite es

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} a\frac{1-q^{N+1}}{1-q} = \frac{a}{1-q}\,.$$

Un ejemplo concreto. Para la serie geométrica ya vista:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})^n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots\,,$$

tenemos $q = -1/2$. Puesto que $|-1/2| = 1/2 < 1$, la serie converge y su suma es

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})^n = \frac{1}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\,.$$

Ejemplos resueltos.

E-1. Examinar la convergencia de las series

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln n\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-3}{5n+8}\,.$$

Solución. El término n-ésimo de la serie es $a_n = (-1)^n \ln n$. Es fácil ver que $|a_n| = \ln n \to +\infty$ cuando $n \to \infty$. Por ello es imposible que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$; de hecho, es fácil ver que no existe $\lim_{n\to\infty} a_n$ al ser la sucesión (a_n) oscilante. Por el criterio del término general para la convergencia, la serie diverge.

La situación es similar para la segunda serie. El término general $a_n = \frac{n-3}{5n+8}$ sí tiene límite: $\lim_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{5}$ pero, como éste es distinto de cero, la serie diverge.

Obsérvese que, gracias al Criterio del término general de la serie, no hemos tenido que calcular las sumas parciales de ninguna de las dos series.

E-2. Examinar la convergencia y, si procede, determinar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n(n+2)}$.

Solución. En este ejemplo, el término general $a_n = \dfrac{2}{n(n+2)} \to 0$, $n \to \infty$, así que no podemos deducir ni la convergencia ni la divergencia. Por tanto, tendremos que hacer un cálculo directo.

Usando las fracciones parciales (simples), es fácil ver que $\dfrac{2}{n(n+2)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+2}$. Usando esta representación para escribir la suma parcial N-ésima de la serie, vemos que muchos términos se cancelan, quedando sólo cuatro de ellos al final:

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= (1-\frac{1}{3}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{4}) + (\frac{1}{3}-\frac{1}{5}) + (\frac{1}{4}-\frac{1}{6}) + \dots + (\frac{1}{N-2}-\frac{1}{N}) + (\frac{1}{N-1}-\frac{1}{N+1}) + (\frac{1}{N}-\frac{1}{N+2}) \\ &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2}\,. \end{aligned}$$

(Es decir, se trata de una suma “telescópica”.) Evidentemente, $S_N \to \dfrac{3}{2}$ cuando $N \to \infty$. Por tanto, la serie es convergente y su suma es igual a tres medios.

E-3. Discutir la convergencia y calcular la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}\,.$$

Solución. En primer lugar, se trata de una serie geométrica de razónón $q = 2/3$ y el primer término $a = 4$, luego es convergente. Esto se comprueba fácilmente dividiendo dos términos consecutivos:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+2}}{3^n}}{\frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}} = \frac{2}{3}\,.$$

El primer término (obtenido sustituyendo $n = 1$) es $a = 4$, luego es fácil ver que la serie también se puede escribir como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} 4\left(\frac{2}{3}\right)^k\,.$$

Esto se puede ver también de otra manera, haciendo el cambio de índice $n - 1 = k$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}} = 4\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 4\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k\,.$$

(En efecto, siendo $n - 1 = k$, se observa que cuando $n = 1$, se tiene que $k = 0$, cuando $n = 2$, $k = 1$, etc.)

Finalmente, según la fórmula para la suma de una serie geométrica,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}} = \frac{4}{1 - \dfrac{2}{3}} = 12\,.$$

E-4. ¿Es convergente la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \pi^{n/2} e^{-n}$? De ser así, calcúlese su suma.

Solución. Puesto que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi^{n/2} e^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi}^n}{e^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{e}\right)^n$$

nuestra serie es geométrica de razónón $q = \sqrt{\pi}/e$. Puesto que $q > 0 > -1$, sólo tenemos que ver que $q < 1$ para comprobar que la serie converge. Puesto que $\pi < 4$, se sigue que $\sqrt{\pi} < 2 < e$, luego $\sqrt{\pi}/e < 2$.

E-5. ¿Para qué valores reales de x converge la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5x-1}{2}\right)^n$?

Solución. Nuestra serie es geométrica de razónón $q = (5x - 1)/2$. Por tanto, según el Criterio de convergencia para las series geométricas, converge si y sólo si $-1 < (5x - 1)/2 < 1$, es decir: $-2 < 5x - 1 < 2$. Es fácil ver que esta doble desigualdad es equivalente a $-1/5 < x < 3/5$.

Preparado por:
Dragan Vukotić
Coordinador de la asignatura