Análisis Matemático I

(Grado en Tecnología y Servicios de Ingeniería de Telecomunicación, 2010-11)

SOLUCIONES del Segundo examen parcial, 16 de diciembre de 2010

SOLUCIONES

Primera Parte: preguntas de tipo test (hasta 60 puntos)

TABLA DE RESPUESTAS

Modelo 1

Probl.	P. 1	P. 2	P. 3	P. 4	P. 5
Resp.	B	E	C	A	E

Modelo 2

Probl.	P. 1	P. 2	P. 3	P. 4	P. 5
Resp.	D	A	F	E	C

SOLUCIONES COMPLETAS

(El orden de los problemas no necesariamente coincide con ninguno de los modelos 1 y 2.)

---

1. La descomposición en fracciones simples (parciales) de la función racional

$$\frac{x^2}{x^3-1}$$

tiene la siguiente forma: $\boxed{\dfrac{Ax+B}{x^2+x+1}+\dfrac{C}{x-1}}$. Lo mismo es cierto para la función del otro modelo:

$$\frac{x^2+1}{x^3-1}\,.$$

La razón es que, en ambos casos, el numerador tiene grado 2, menos que el grado del denominador, que es 3, y que el denominador se puede factorizar como $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$. Se trata de una formula que ya hemos visto en clase y que, en todo caso, se puede deducir dividiendo el polinomio x^3-1 por $x-1$ (Ruffini). Observemos que el polinomio x^2+x+1 ya no se puede factorizar más (es decir, en factores lineales reales) porque la ecuación cuadrática $x^2+x+1=0$ no tiene soluciones reales (al ser su discriminante negativo), como se puede comprobar fácilmente.

2. La función $f(x) = x^2\, e^x$ tiene como puntos de inflexión los siguientes: $\boxed{-2-\sqrt{2} \text{ y } -2+\sqrt{2}}$.

Para encontrar los puntos de inflexión, tenemos que ver cómo cambia el signo de la segunda derivada. Derivando dos veces, obtenemos:

$$f'(x) = 2x\, e^x + x^2\, e^x\,, \quad f''(x) = 2\, e^x + 4x\, e^x + x^2\, e^x = (x^2+4x+2)\, e^x$$

Puesto que $e^x > 0$ para todo x, se sigue que el signo de la segunda derivada es el mismo que el signo del trinomio cuadrático x^2+4x+2. Es fácil ver que las soluciones de la ecuación $x^2+4x+2=0$ son precisamente $-2-\sqrt{2}$, $-2+\sqrt{2}$ y que $x^2+4x+2<0$ para $-2-\sqrt{2}<x<-2+\sqrt{2}$ y $x^2+4x+2>0$ para el resto de los valores de x. Esto significa que en ambos puntos $-2-\sqrt{2}$ y $-2+\sqrt{2}$ la segunda derivada de f cambia de signo y, por tanto, ambos son puntos de inflexión.

---

3. Para la función $f(x) = x \operatorname{sen} x$, su polinomio de Taylor de orden 2 en $a=0$ es $\boxed{P_2(x) = x^2}$.

Como recordaremos de la teoría vista en clase, los polinomios de Taylor en $a=0$ de la función $\operatorname{sen} x$ son x, $x - x^3/3!$, etc. Multiplicándolos por x, obtenemos que los polinomios correspondientes de $f(x)$ son x^2, $x^2 - x^4/3!$, etc. El primero es de grado 2 mientras que el siguiente ya es de grado 4; por tanto, $P_2(x) = x^2$. Otra manera de llegar a la misma conclusión es calculando $f'(x) = \operatorname{sen} x + x\cos x$ y $f''(x) = 2\cos x - x \operatorname{sen} x$ y evaluándolos en $x=0$, para luego calcular $P_2(x) = f(0) + f'(0) + \dfrac{f''(0)}{2}x^2 = x^2$.

---

4. El valor de la integral $\displaystyle\int_0^{\ln 2} xe^x\, dx$ es $\boxed{2\ln 2 - 1}$.

Integrando por partes: $u=x$, $dv = e^x\, dx$, $du = dx$, $v = e^x$, obtenemos

$$\int xe^x\, dx = xe^x - \int e^x\, dx = xe^x - e^x + C\,.$$

Por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo, tenemos que

$$\int_0^{\ln 2} xe^x\, dx = (xe^x - e^x)\big|_0^{\ln 2} = \ln 2 e^{\ln 2} - e^{\ln 2} - (0 - e^0) = 2\ln 2 - 2 + 1 = 2\ln 2 - 1\,.$$

---

5. La derivada de la función $F(x) = \displaystyle\int_{x^2}^0 \frac{e^t}{t}\, dt$ es $\boxed{-\dfrac{2e^{x^2}}{x}}$.

Observemos que $F(x) = G(x^2)$, donde $G(x) = \displaystyle\int_x^0 \frac{e^t}{t}\, dt = -\int_0^x \frac{e^t}{t}\, dt$. Combinando la Regla de la Cadena con el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, obtenemos

$$F'(x) = 2x\, G'(x^2) = -2x\frac{e^{x^2}}{x^2} = -\frac{2e^{x^2}}{x}\,.$$

Segunda Parte

Los siguientes ejercicios son de desarrollo.

---

6. [20 puntos] Calcular la integral

$$\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}\,,$$

explicando los detalles y el procedimiento aplicado.

Aplicamos el cambio de variable: $t = \ln x$. Entonces $\frac{dx}{x} = dt$. Cuando $x = 1$, $t = \ln 1 = 0$ y cuando $x = e$, $t = \ln e = 1$, así que la integral se convierte en

$$\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arc\,tg} t|_0^1 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}\,.$$

---

8. [20 = 10 + 10 puntos] (Se pide explicar cómo se ha llegado a las conclusiones y mencionar o enunciar los teoremas utilizados.)

(a) Determinar los puntos críticos de la función

$$F(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt\,, \qquad x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right),$$

en el intervalo indicado.

Aplicando el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, derivamos la función F, obteniendo

$$F'(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,.$$

Para encontrar los puntos críticos de F, igualamos la derivada a cero y obtenemos $\operatorname{sen} x = 0$. Recordando que $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$, la única posibilidad es $x = \pi$.

(b) Razonar si los puntos críticos encontrados son puntos de máximo o mínimo o no.

Para decidir si el punto crítico encontrado, $x = \pi$, es un punto de extremo local o no, calculamos la segunda derivada de F (aplicando la regla del cociente) y examinamos su signo en dicho punto:

$$F''(x) = \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}\,; \quad F''(\pi) = \frac{\pi\cdot(-1) - 0}{\pi^2} = -\frac{1}{\pi} < 0\,.$$

Por tanto, el punto crítico es un punto de máximo local.

Preparado por: Dragan Vukotić
coordinador de la asignatura