Análisis Matemático I

(Grado en Tecnología y Servicios de Ingeniería de Telecomunicación, 2010-11)

Primer examen parcial, 28 de octubre de 2010

SOLUCIONES

Primera Parte: preguntas de tipo test (hasta 72 puntos)

TABLA DE RESPUESTAS

Modelo 1

Probl.	P. 1	P. 2	P. 3	P. 4	P. 5	P. 6
Resp.	B	E	C	A	F	E

Modelo 2

Probl.	P. 1	P. 2	P. 3	P. 4	P. 5	P. 6
Resp.	B	A	D	E	D	B

SOLUCIONES COMPLETAS

(El orden de los problemas no necesariamente coincide con ninguno de los modelos 1 y 2.)

---

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x^3+2x-17}{3x^2-6x+7} = \boxed{-\infty}$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^3+2x-17}{3x^2-6x+7} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5x+\frac{2}{x^2}-\frac{17}{x^3}}{3-\frac{6}{x}+\frac{7}{x^2}} = -\infty .$$

---

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 3x}{\operatorname{sen} 4x} = \boxed{\dfrac{3}{4}}$.

Recordando que $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$ y $\lim\limits_{t\to 0} \cos t = \cos 0 = 1$, podemos deducir que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{\operatorname{sen} 4x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 4x} \cdot \frac{1}{\cos 3x} \right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} \cdot 3}{\frac{\operatorname{sen} 4x}{4x} \cdot 4} \cdot \frac{1}{\cos 3x} \right) = \frac{3}{4} .$$

3. El dominio de la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x^2-5x+6}}$ es el intervalo $\boxed{[4,+\infty)}$.

Para que estén definidas ambas raíces cuadradas y para que el denominador no se anule, es necesario y suficiente que se cumplan a la vez las condiciones

$$x-4 \geq 0 \quad \text{y} \quad x^2-5x+6 = (x-2)(x-3) > 0\,.$$

En otras palabras, debe cumplirse tanto $x \geq 4$ como una de las siguientes dos condiciones: $x > 3$ ó $x < 2$. Es evidente que $x \geq 4$ y $x > 3$ se reduce simplemente a $x \geq 4$, mientras que $x \geq 4$ y $x < 2$ a la vez es imposible. Por tanto, el dominio es $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 4\} = [4,+\infty)$.

---

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{2n} = \boxed{\dfrac{1}{e^2}}$

El término general de la sucesión, $a_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{2n}$, cumple

$$\frac{1}{a_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = \left((1+\frac{1}{n})^n\right)^2 \to e^2\,, \quad n\to\infty\,.$$

Por tanto, $a_n \to \dfrac{1}{e^2}$, $n\to\infty$.

---

5. La tangente a la gráfica de la función $f(x) = (e^x-1)^x$ en el punto $(1, e-1)$ tiene la pendiente $\boxed{(e-1)\cdot[\ln(e-1)+\frac{e}{e-1}]}$.

La pendiente es igual a $f'(1)$. Para calcular este valor, conviene usar la derivación logarítmica. Tomando el logaritmo neperiano de ambos lados en $f(x) = (e^x-1)^x$, obtenemos $\ln f(x) = x\,\ln(e^x-1)$. Derivando ambos lados, se sigue que

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(e^x-1) + \frac{xe^x}{e^x-1}$$

y, por tanto,

$$f'(x) = (e^x-1)^x\left(\ln(e^x-1)+\frac{xe^x}{e^x-1}\right)\,.$$

Luego sólo queda evaluar la función en $x=1$ para obtener la respuesta indicada.

---

6. Para la función f dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1-e^x, & \text{si } x \leq 0 \\ \ln(x+1), & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

podemos afirmar $\boxed{\text{que es continua en 0 pero no es derivable allí}}$.

En efecto, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(1-e^x) = 1-e^0 = 0$ y $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\ln(x+1) = \ln 1 = 0$. Además, $0 = f(0)$, luego f es continua en $x=0$.

Podemos comprobar la derivabilidad en $x=0$ por definición considerando los límites laterales del cociente diferencial. Por un lado, tenemos que

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{1-e^h}{h} = -\lim_{h\to 0^-}\frac{e^h-1}{h} = -1\,.$$

Sin embargo,

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{\ln(1+h)}{h} = 1\,.$$

Puesto que estos dos límites laterales no coinciden, deducimos que no existe

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}\,,$$

es decir, f no es derivable en $x=0$.

Segunda Parte

Los siguientes ejercicios son de desarrollo.

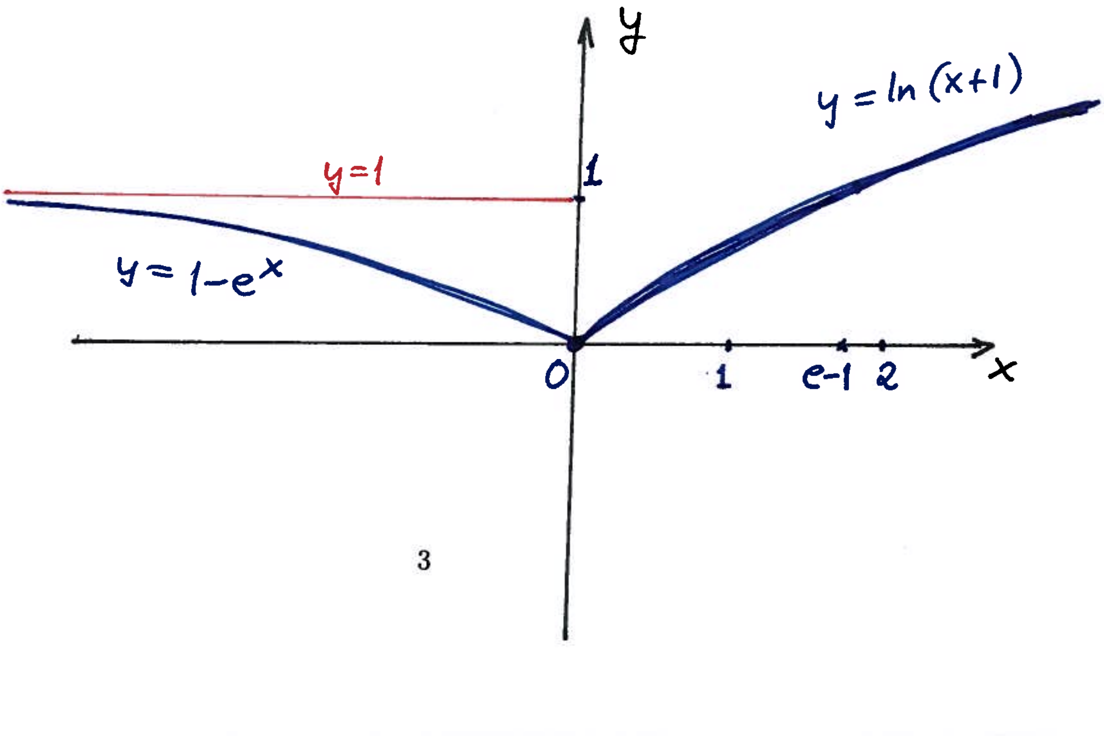
---

7. [10 puntos] Esbozar la gráfica de la función f del problema anterior, indicando las coordenadas de, al menos, dos puntos en la gráfica, los límites de $f(x)$ cuando $x\to\pm\infty$ y las posibles asíntotas horizontales o verticales.

$$f(0)=0\,,\qquad f(e-1)=\ln e = 1\quad (e-1\approx 1{,}7)\,.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\ln(x+1) = +\infty\,,\qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(1-e^x) = 1-0 = 1\,.$$

Asíntota horizontal: $y=1$ cuando $x\to-\infty$.



8. [18 puntos] Calcular el límite

$$L = \lim_{x\to 0+} (e^x - 1)^x .$$

Se pide presentar una solución razonada, comentando el procedimiento empleado y nombrando los teoremas y reglas que se utilicen.
(Las soluciones que empleen resultados teóricos más avanzados y que no se hayan visto en clase, podrían puntuar menos si no se explican adecuadamente.)

En primer lugar, usando la continuidad de la función elemental logaritmo (y suponiendo que $L > 0$), vemos que

$$\ln L = \ln \lim_{x\to 0+} (e^x - 1)^x = \lim_{x\to 0+} \ln(e^x - 1)^x = \lim_{x\to 0+} x \ln(e^x - 1) .$$

El siguiente paso es convertir la expresión que figura en el límite en una fracción:

$$\ln L = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(e^x - 1)}{\frac{1}{x}} .$$

Puesto que tenemos una forma $\frac{\infty}{\infty}$, podemos aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\ln L = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{e^x}{e^x-1}}{-\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x\to 0+} \frac{x^2 e^x}{e^x - 1} .$$

El último límite puede calcularse de varias maneras. He aquí una. Recordando el límite elemental:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 ,$$

obtenemos que

$$\ln L = - \lim_{x\to 0+} \frac{x}{e^x - 1} \cdot x e^x = -1 \cdot 0 = 0 .$$

Puesto que $\ln L = 0$, se sigue que $L = 1$.

Preparado por: Dragan Vukotić
coordinador de la asignatura