Análisis Matemático I

(Grado en Tecnología y Servicios de Ingeniería de Telecomunicación, 2010-11)

Examen final extraordinario, 13 de junio de 2011

PUNTUACIÓN:

Problemas 1–12	P. 13	P. 14	TOTAL

Inicial del primer apellido: ________

NOMBRE: ____________________________

APELLIDOS: ____

D.N.I. / PASAPORTE: __________________________________

FIRMA: ____

Importante: Al final del examen sólo se deben entregar estas hojas. No se aceptarán hojas adicionales.

Primera Parte: preguntas de tipo test (hasta 72 puntos)

Las preguntas 1–12 son de tipo test. Se pide elegir una única respuesta en cada problema y apuntarla en la tabla siguiente.

TABLA DE RESPUESTAS

Probl.	P. 1	P. 2	P. 3	P. 4	P. 5	P. 6	P. 7	P. 8	P. 9	P. 10	P. 11	P. 12
Resp.	F	A	C	E	A	D	E	D	E	F	C	A

Cada respuesta correcta vale 6 puntos, incorrecta o doble: -1 puntos, respuesta en blanco: 0 puntos. ***No se tendrán en cuenta las respuestas marcadas fuera de la tabla**, aunque sean correctas.*

1. Determinar todos los puntos x en los que existe la función

$$h(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-5x+6}}.$$

(A) $(2,+\infty)$, (B) $(2,3)$, (C) $[2,3]$, (D) $[3,+\infty)$,
(E) $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\}$, (F) $(-\infty,2) \cup (3,+\infty)$.

---

2. Determinar el valor exacto del límite

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n.$$

(A) $e^{1/3}$, (B) e^3, (C) $e^{-1/3}$, (D) $+\infty$, (E) 0, (F) e^{-3}.

---

3. El área de la región en el plano acotada por las curvas $y = x^2 - 2x + 1$, $y = 1 - x^2$ es igual a:

(A) π, (B) $1/2$, (C) $1/3$, (D) $-1/3$, (E) 1, (F) otro valor.

---

4. ¿Para qué valores reales de x converge la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(x-1)^n}{2^n}$?

(A) $x > -1$, (B) para todo x, (C) sólo para $x = -1$,
(D) $x > 3$, (E) $-1 < x < 3$, (F) para ningún x.

---

5. La función $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$ tiene las siguientes asíntotas:

(A) $y = 1$ e $y = -1$, (B) sólo $y = 1$, (C) sólo $y = -1$,
(D) $y = x$ e $y = -x$, (E) sólo $y = x$, (F) sólo $y = -x$.

---

6. Para la función

$$f(x) = \begin{cases} 2\,\mathrm{sen}\, x, & \text{si } x \leq 0 \\ e^x - 1, & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

sólo una de las siguientes afirmaciones es cierta. ¿Cuál de ellas?

(A) no existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, (B) existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ pero f no es continua en 0,
(C) f es continua en 0 pero $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$, (D) f es continua en 0 pero $f'(0)$ no existe,
(E) $f'(0)$ sí existe (como valor finito), (F) $f'(0) = +\infty$.

---

7. La suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{3^{n+1}}$ es:

(A) 9, (B) $\frac{1}{9}$, (C) 1, (D) $\frac{1}{3}$, (E) $\frac{1}{5}$; (F) ninguno de los valores anteriores.

8. El polinomio de Taylor de $f(x) = x^2 \cos x$ de grado 4 es:

(A) $x - \frac{x^3}{6}$, (B) $\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{6}$, (C) $x - x^2 + x^3 - x^4$,

(D) $x^2 - \frac{x^4}{2}$, (E) $x^2 + x^3 - \frac{x^4}{6}$, (F) ninguno de los anteriores.

9. El valor exacto de la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3\,dx}{1+x^8}$ es:

(A) $+\infty$, (B) 0, (C) $\frac{\pi}{4}$, (D) $\frac{\pi}{2}$, (E) $\frac{\pi}{16}$, (F) ninguno de los anteriores.

10. La descomposición en fracciones simples (parciales) de la función racional

$$\frac{x^2+1}{x^3-1}$$

tiene la siguiente forma:

(A) $\displaystyle\frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{C}{x+1}$, (B) $\displaystyle\frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2}$, (C) $\displaystyle\frac{Ax+B}{x^2-x+1} + \frac{C}{x+1}$,

(D) $\displaystyle\frac{Ax+B}{x^2-x+1} + \frac{C}{x-1}$, (E) $\displaystyle\frac{A}{x^2+x+1} + \frac{B}{x-1}$, (F) $\displaystyle\frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{C}{x-1}$.

11. El único punto de inflexión de la función $f(x) = x\,e^{-3x}$ es el siguiente:

(A) $1/e$, (B) $1/3$, (C) $2/3$, (D) $3/2$, (E) $4/9$, (F) otro.

12. El valor exacto de la expresión $(1-i)^{200}$ es:

(A) 2^{100}, (B) 0, (C) i, (D) $2^{100}i$, (E) -2^{100}, (F) ninguno de los anteriores.

Segunda Parte: ejercicios de desarrollo (hasta 28 puntos)

En estos ejercicios, es necesario explicar cómo se han obtenido las conclusiones y mencionar los teoremas utilizados. Las soluciones deben ser breves y concisas. ***No se admitirán hojas adicionales.***

---

13. [14 puntos] Calcúlese razonadamente la derivada de la función

$$f(x) = (e^x + 1)^x .$$

$y = f(x)$; $e^x + 1 > 0 + 1 = 1 > 0 \Rightarrow \exists \ln(e^x+1)$.

$\ln y = x \ln(e^x+1)$. Derivando respecto a x, obtenemos:

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \ln(e^x+1) + x \cdot \frac{e^x}{e^x+1} \Rightarrow$$

$$y' = y\left[\ln(e^x+1) + \frac{xe^x}{e^x+1}\right] = (e^x+1)^x\left[\ln(e^x+1) + \frac{xe^x}{e^x+1}\right].$$

Hemos utilizado el método de derivación logarítmica y la regla de la cadena, así como la regla del producto.

---

14. [14 puntos] Hallar los puntos de máximo y mínimo de la función F, dada por $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^3-12x} e^{t^2}\,dt$.

$f(t) = e^{t^2}$ es continua en $\mathbb{R}$. 2º Tma. Fundamental del Cálculo $\Rightarrow F'(x) = (x^3-12x)' \cdot e^{(x^3-12x)^2}$ (también hemos utilizado la Regla de la Cadena)

$$\Rightarrow F'(x) = (3x^2-12)\, e^{(x^3-12x)^2} = 3(x^2-4)\, e^{(x^3-12x)^2}.$$

$3 \cdot e^{(x^3-12x)^2} > 0$, $\forall x \Rightarrow$ el signo de $F'(x)$ es el mismo que el de la función $x^2-4 = (x-2)(x+2)$.

		-2		2	
$x-2$	$-$		$-$		$+$
$x+2$	$-$		$+$		$+$
x^2-4	$+$		$-$		$+$
$F(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$F \nearrow$ en $(-\infty,-2)$ y en $(2,+\infty)$

y $\searrow$ en $(-2,2) \Rightarrow$

F alcanza su máx local en $x=-2$ y su mín local en $x=2$.