**Análisis Matemático I**

(Grado en Tecnología y Servicios de Ingeniería de Telecomunicación, 2010-11)

**SOLUCIONES del EXAMEN FINAL, 10 de enero de 2011**

**Primera Parte: preguntas de tipo test** (hasta 72 puntos)

*Las preguntas 1–12 son de tipo test. Se pide elegir una única respuesta en cada problema y apuntarla en la tabla siguiente.*

**Modelo 1**

TABLA DE RESPUESTAS

| Probl. | P. 1 | P. 2 | P. 3 | P. 4 | P. 5 | P. 6 | P. 7 | P. 8 | P. 9 | P. 10 | P. 11 | P. 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Resp. | B | A | C | E | F | E | C | E | D | E | D | A |

*Cada respuesta correcta vale 6 puntos, incorrecta o doble: -1 puntos, respuesta en blanco: 0 puntos.*

---

**1**. Determinar todos los puntos de continuidad de la función

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2+7x-6}}\,.$$

(A) $(6,+\infty)$, (B) $(1,6)$, (C) $[1,6]$, (D) $[6,+\infty)$,
(E) $[1,6)$, (F) otro conjunto de valores reales.

---

**2**. Determinar el valor exacto del límite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{3n}.$$

(A) $e^{-3}$, (B) $e^3$, (C) $1$, (D) $+\infty$, (E) $0$, (F) no existe.

---

**3**. El área de la región en el plano acotada por las curvas $y = x^2 - 2x + 1$, $y = 1 - x^2$ es igual a:

(A) $\pi$, (B) $1/2$, (C) $1/3$, (D) $-1/3$, (E) $1$, (F) otro valor.

---

**4**. ¿Para qué valores reales de $x$ converge la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-2)^n}{3^n}$?

(A) $x > 5$, (B) para todo $x$, (C) sólo para $x = 2$,
(D) $x > -1$, (E) $-1 < x < 5$, (F) para ningún $x$.

---

**5**. Un fabricante quiere diseñar una caja cerrada que tenga una base cuadrada, un área superficial de $54$ cm$^2$ y el máximo volumen posible. ¿Qué dimensiones debe tener la caja?

(A) $3 \times 3 \times 5$, (B) $5 \times 5 \times 2$, (C) $4 \times 4 \times 2$,
(D) $3 \times 3 \times 6$, (E) $5 \times 5 \times 3$, (F) $3 \times 3 \times 3$.

---

**6**. Para la función

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x+1), & \text{si } x \leq 0 \\ e^x - 1, & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

sólo una de las siguientes afirmaciones es cierta. ¿Cuál de ellas?

(A) no existe $\lim_{x \to 0} f(x)$, (B) existe $\lim_{x \to 0} f(x)$ pero $f$ no es continua en $0$,
(C) $f$ es continua en $0$ pero $\lim_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$, (D) $f$ es continua en $0$ pero $f'(0)$ no existe,
(E) $f'(0)$ sí existe (como valor finito), (F) $f'(0) = +\infty$.

---

**7**. Calcular la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{5^n}.$$

(A) $1$, (B) $\frac{1}{7}$, (C) $-\frac{2}{7}$, (D) $-\infty$, (E) $-\frac{14}{25}$, (F) ninguno de los valores anteriores.

---

**8**. El polinomio de Taylor de $f(x) = xe^{-x}$ de grado $4$ es:

(A) $x^2 - \frac{x^4}{3}$, (B) $x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6}$, (C) $x - x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{3}$,
(D) $x - \frac{x^3}{2}$, (E) $x - x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{6}$, (F) ninguno de los anteriores.

---

**9**. El valor exacto de la integral impropia $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$ es:

(A) $+\infty$, (B) $0$, (C) $1/e$, (D) $1$, (E) $-\infty$, (F) ninguno de los anteriores.

---

**10**. La derivada de

$$y = (\cos x)^{\operatorname{sen} x}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2},$$

es la siguiente función:

(A) $y' = (\cos x)^{\operatorname{sen} x + 1}$, (B) $y' = (\cos x)^{\operatorname{sen} x}$,
(C) $y' = (\cos x)^{\operatorname{sen} x} (\cos x \ln(\cos x) - \operatorname{tg} x)$, (D) $y' = \operatorname{sen} x (\cos x)^{\operatorname{sen} x}$,
(E) $y' = (\cos x)^{\operatorname{sen} x} (\cos x \ln(\cos x) - \operatorname{sen} x \operatorname{tg} x)$, (F) otra.

---

**11**. Los puntos de inflexión de la función $F$, dada por $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} e^{-t^2}\, dt$, son los siguientes:

(A) sólo $x = -1/2$, (B) sólo $x = 1/\sqrt{2}$, (C) ambos $x = 1/2$ y $x = -1/2$,
(D) ambos $x = 1/\sqrt{2}$ y $x = -1/\sqrt{2}$, (E) sólo $x = 1/2$, (F) sólo $x = -1/\sqrt{2}$.

---

**12**. El valor exacto de la expresión $(\sqrt{3} + i)^{300}$ es:

(A) $2^{300}$, (B) $0$, (C) $2^{-300}$, (D) $2^{300} i$, (E) $2^{150}$, (F) ninguno de los anteriores.

---

**Modelo 2**

TABLA DE RESPUESTAS

| Probl. | P. 1 | P. 2 | P. 3 | P. 4 | P. 5 | P. 6 | P. 7 | P. 8 | P. 9 | P. 10 | P. 11 | P. 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Resp. | D | E | D | A | E | F | C | A | B | E | C | A |

---

**1**. Determinar el valor exacto del límite

$$\lim_{n \to \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{3n}.$$

(A) $+\infty$, (B) $e^3$, (C) $1$, (D) $e^{-3}$, (E) $0$, (F) no existe.

---

**2**. Para la función

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x+1), & \text{si } x \leq 0 \\ e^x - 1, & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

sólo una de las siguientes afirmaciones es cierta. ¿Cuál de ellas?

(A) no existe $\lim_{x\to 0} f(x)$, (B) existe $\lim_{x\to 0} f(x)$ pero $f$ no es continua en $0$,
(C) $f$ es continua en $0$ pero $\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$, (D) $f$ es continua en $0$ pero $f'(0)$ no existe,
(E) $f'(0)$ sí existe (como valor finito), (F) $f'(0) = +\infty$.

---

**3**. El valor exacto de la integral impropia $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$ es:

(A) $-\infty$, (B) $0$, (C) $1/e$, (D) $1$, (E) $+\infty$, (F) ninguno de los anteriores.

---

**4**. Calcular la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{5^n}.$$

(A) $-\dfrac{2}{7}$, (B) $\dfrac{1}{7}$, (C) $1$, (D) $-\infty$, (E) $-\dfrac{14}{25}$, (F) ninguno de los valores anteriores.

---

**5**. El polinomio de Taylor de $f(x) = xe^{-x}$ de grado $4$ es:

(A) $x - \dfrac{x^3}{2}$, (B) $x - x^2 + \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{x^4}{3}$, (C) $x + x^2 + \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^4}{6}$,
(D) $x^2 - \dfrac{x^4}{3}$, (E) $x - x^2 + \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{x^4}{6}$, (F) ninguno de los anteriores.

---

**6**. Un fabricante quiere diseñar una caja cerrada que tenga una base cuadrada, un área superficial de $54$ cm$^2$ y el máximo volumen posible. ¿Qué dimensiones debe tener la caja?

(A) $3 \times 3 \times 6$, (B) $5 \times 5 \times 3$, (C) $4 \times 4 \times 2$,
(D) $3 \times 3 \times 5$, (E) $5 \times 5 \times 2$, (F) $3 \times 3 \times 3$.

---

**7**. Determinar todos los puntos de continuidad de la función

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 7x - 6}}.$$

(A) $[6, +\infty)$, (B) $[1, 6]$, (C) $(1, 6)$, (D) $(6, +\infty)$,
(E) $[1, 6)$, (F) otro conjunto de valores reales.

---

**8**. El valor exacto de la expresión $(\sqrt{3}+i)^{300}$ es:

(A) $2^{300}$, (B) $0$, (C) $2^{-300}$, (D) $2^{300}i$, (E) $2^{150}$, (F) ninguno de los anteriores.

---

**9**. El área de la región en el plano acotada por las curvas $y = x^2 - 2x + 1$, $y = 1 - x^2$ es igual a:

(A) $1$, (B) $1/3$, (C) $-1/3$, (D) $1/2$, (E) $\pi$, (F) otro valor.

---

**10**. La derivada de

$$y = (\cos x)^{\operatorname{sen} x}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2},$$

es la siguiente función:

(A) $y' = \operatorname{sen} x (\cos x)^{\operatorname{sen} x}$, (B) $y' = (\cos x)^{\operatorname{sen} x}$,

(C) $y' = (\cos x)^{\operatorname{sen} x} (\cos x \ln(\cos x) - \operatorname{tg} x)$, (D) $y' = (\cos x)^{\operatorname{sen} x + 1}$,

(E) $y' = (\cos x)^{\operatorname{sen} x} (\cos x \ln(\cos x) - \operatorname{sen} x \operatorname{tg} x)$, (F) otra.

---

**11**. Los puntos de inflexión de la función $F$, dada por $F(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2}\, dt$, son los siguientes:

(A) sólo $x = -1/\sqrt{2}$, (B) sólo $x = 1/\sqrt{2}$, (C) ambos $x = 1/\sqrt{2}$ y $x = -1/\sqrt{2}$,
(D) ambos $x = 1/2$ y $x = -1/2$, (E) sólo $x = 1/2$, (F) sólo $x = -1/2$.

---

**12**. ¿Para qué valores reales de $x$ converge la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-2)^n}{3^n}$?

(A) $-1 < x < 5$, (B) para todo $x$, (C) $x > -1$,
(D) sólo para $x = 2$, (E) $x > 5$, (F) para ningún $x$.

---

**Segunda Parte: ejercicios de desarrollo** (hasta 28 puntos)

*En estos ejercicios, es necesario explicar cómo se han obtenido las conclusiones y mencionar o enunciar los teoremas utilizados. Las soluciones deben ser breves y concisas.*

---

**13**. [16 puntos] Calcúlese el valor exacto de la integral

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}\,.$$

Solución. Aplicando el *cambio de variable* $\sqrt{x}=t$ en nuestra integral definida, obtenemos:

$$\frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt\,, \quad x=t^2\,; \qquad x=1:\ t=1\,, \quad x=3:\ t=\sqrt{3}\,,$$

de manera que

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} = 2\operatorname{arc\,tg} x|_1^{\sqrt{3}} = 2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6}\,.$$

---

**14**. [12 puntos] Si $f:\ [0,1]\to\mathbb{R}$ es una función continua y $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = 1$, ¿es cierto que siempre existe $c\in(0,1)$ tal que $\displaystyle\int_0^c f(t)\,dt = \frac{1}{3}$? Razonar la respuesta.

Solución. Sí, esto se cumple siempre. Damos la prueba a continuación.
En primer lugar, puesto que $f\in C[0,1]$, podemos definir la función $F$ mediante

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt\,, \qquad x\in[0,1]\,.$$

Según el *Segundo Teorema Fundamental del Cálculo*, $F$ es diferenciable y, por tanto, continua en el mismo intervalo. Además, $F$ cumple

$$F(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0\,, \qquad F(1) = \int_0^1 f(t)\,dt = 1\,.$$

Puesto que $0<1/3<1$, por el *Teorema de Bolzano* se sigue que existe $c\in(0,1)$ tal que $F(c)=1/3$; es decir,

$$\int_0^c f(t)\,dt = \frac{1}{3}\,.$$

---