Análisis Matemático I

Grado en Tecnología y Servicios de Ingeniería de Telecomunicación, 2010-11

Ejercicios mixtos (HOJA M-3), para preparar el Examen Final

Las siguientes preguntas podrían servir, a título orientativo, como preguntas-modelo para el Examen Final. El número de problemas, el contenido o el nivel de dificultad del verdadero examen podrían ser muy diferentes de los de este modelo.
Para cada uno de los últimos temas vistos en clase: integrales impropias, series numéricas, series de potencias y de Taylor, números complejos, el verdadero examen sólo podrá contener una pregunta (aunque aquí aparezcan varias en algunos de esos temas).

En las preguntas de tipo test, como siempre, no se pide justificar la respuesta; sólo hay que elegir una de entre las ofrecidas. En los demás problemas se pide razonar las conclusiones y presentar todos los detalles del trabajo. Tiempo recomendado para practicar con estos problemas: dos horas.

---

1. ¿Para qué valores del parámetro real a la ecuación $x^2 - (a+2)x + (a+1) = 0$ no tiene ninguna solución real?

(A) $a > 0$; (B) $a < 0$; (C) $a = 0$; (D) $a = 1$;

(E) $a = -1$; (F) tiene una solución real para todo a.

---

2. De las sucesiones indicadas abajo:

$$\frac{(-1)^n}{n+1}, \qquad (1-\frac{2}{n})^n, \qquad \frac{n^3-n+1}{3n^2+3n+7}$$

convergen (a un límite finito) las siguientes:

(A) las tres; (B) sólo la última; (C) sólo la primera;

(D) sólo las dos primeras; (E) sólo la segunda; (F) ninguna.

---

3. Para la función

$$f(x) = \begin{cases} e^x + 1, & \text{si } x \le 0 \\ 2\cos x, & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

sólo una de las siguientes afirmaciones es cierta. ¿Cuál de ellas?

(A) no existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, (B) existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ pero f no es continua en 0,

(C) f es continua en 0 pero $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$, (D) f es continua en 0 pero $f'(0)$ no existe,

(E) $f'(0)$ sí existe (como valor finito), (F) $f'(0) = +\infty$.

---

4. La suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{3^{n+1}}$ es:

(A) 9 , (B) $\frac{1}{9}$, (C) 1 , (D) $\frac{1}{3}$, (E) $\frac{1}{5}$; (F) ninguno de los valores anteriores.

---

5. El área de la región en el plano acotada por las curvas $y = 4 - x$, $y = \frac{3}{x}$ es igual a:

(A) $4 - 3\ln 3$, (B) $\ln 2$, (C) $\pi \ln 3$, (D) $\pi^2/3$, (E) $3/2$, (F) otro valor.

---

6. El valor exacto de la expresión $(1-i)^{200}$ es:

(A) $2^{100}i$, (B) 0, (C) i, (D) 2^{100}, (E) -2^{100}, (F) ninguno de los anteriores.

---

7. El valor de la integral $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \cos^3 x \, dx$ es:

(A) $\frac{\pi}{3}$, (B) $\frac{3}{4}$, (C) $\frac{1}{3}$, (D) $\frac{1}{4}$, (E) 0 , (F) $\frac{\pi}{2}$.

---

8. ¿Para qué valores reales de x converge la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5x-1}{2} \right)^n$?

(A) $x > \frac{3}{5}$; (B) para todo x; (C) $\frac{1}{5} < x < \frac{3}{5}$;

(D) $x \leq \frac{3}{5}$; (E) $-\frac{1}{5} < x < \frac{3}{5}$; (F) para ningún x.

---

9. Calcular razonadamente la derivada de la función $f(x) = (e^x + 1)^{x^2+x}$.

---

10. Desarrollar en serie de Taylor la función $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ y determinar el radio de convergencia de la serie. (Sugerencia: usar el desarrollo de $\ln(1+x)$ visto en clase.)

---

11. Calcular razonadamente $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arc\,sen} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

---

12. Demostrar que existe, al menos, un número real $x \in (0,1)$ tal que

$$e^{x+1} - \ln(x^2 - x + 1) = 2e\,.$$

---

13. Demuéstrese que

$$\left(\frac{1 + i\operatorname{tg} t}{1 - i\operatorname{tg} t}\right)^n = \frac{1 + i\operatorname{tg} nt}{1 - i\operatorname{tg} nt}\,,$$

usando la fórmula de A. de Moivre.

---

14. Analizar los intervalos de crecimiento, los puntos de máximo y mínimo y de inflexión, las asíntotas y esbozar la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4}\,.$$

---

15. Examinar la convergencia de la integral impropia $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^4+1}\,dx$ y, si procede, calcular su valor exacto.

---

16. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y supongamos que existe un número $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_0^a f(t)\,dt = 0\,.$$

Demostrar que existe $s \in (0,a)$ tal que $f(s) = 0$.
