Análisis Matemático I

Grado en Tecnología y Servicios de Ingeniería de Telecomunicación, 2010-11

Ejercicios mixtos, para preparar el segundo examen parcial

Las siguientes preguntas podrían servir, a título orientativo, como preguntas-modelo para el examen parcial. El número de problemas, el contenido o el nivel de dificultad del verdadero examen pueden ser muy diferentes de este modelo. Tiempo recomendado para practicar con estos problemas: 1 hora y media.

Las preguntas iniciales son de tipo test y no se pide justificar la respuesta de entre las 5 ofrecidas. Sólo una de las cinco es correcta.

---

1. El coeficiente al lado de x^6 en el polinomio de Taylor de grado $n \geq 6$ de la función $f(x) = \cos(2x)$ es:
(A) $4/45$, (B) $-4/45$, (C) 0, (D) $1/720$, (E) $-1/720$.

---

2. ¿Cuántos ceros reales tiene la función $f(x) = x^3 + 2x + 1$ (contando las multiplicades)?
(A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3; (E) más de 3.

---

3. ¿Cuántas asíntotas tiene la gráfica de la función $y = \dfrac{x^3+1}{x^2-4}$?
(A) una vertical y una horizontal, (B) dos verticales y ninguna horizontal,
(C) dos horizontales, (D) solo dos verticales, (E) dos verticales y una oblicua.

---

4. La descomposición en fracciones simples (parciales) de la función racional

$$f(x) = \frac{x-12}{(x^2-1)(x-1)(x^2+3)}$$

tiene la siguiente forma:

(A) $\dfrac{Ax+B}{x^2+3} + \dfrac{C}{x+1} + \dfrac{D}{(x-1)^2}$, (B) $\dfrac{Ax+B}{x^2+3} + \dfrac{C}{x+1} + \dfrac{D}{x-1} + \dfrac{E}{(x-1)^2}$,
(C) $\dfrac{Ax+B}{x^2+3} + \dfrac{C}{x-1} + \dfrac{D}{x^2-1}$, (D) $\dfrac{A}{x^2+3} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{x-1} + \dfrac{D}{(x-1)^2}$, (E) otra.

---

5. El único punto de inflexión de la función $f(x) = x\,e^{-3x}$ es el siguiente:
(A) $1/e$, (B) $1/3$, (C) $4/9$, (D) $3/2$, (E) $2/3$.

---

6. El valor exacto de la integral $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$ es:

(A) $\operatorname{arc\,tg}(\ln 2)$, (B) $\ln(5/2)$, (C) $\operatorname{arc\,tg} 2 - \dfrac{\pi}{4}$, (D) $\operatorname{arc\,tg} 2 - \dfrac{\pi}{2}$, (E) otro .

Las siguientes preguntas son de desarrollo. Se pide razonar las respuestas de manera concisa pero clara, mostrando el trabajo e indicando los nombres o los enunciados de los resultados que se utilicen.

---

7. (a) Hallar todas las funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumplan la condición

$$\int_0^{x^2} (1+t^2)\, f(t)\, dt = x^3 - 3x + 1 \,.$$

(b) Hallar los máximos y mínimos de la función F dada por $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^3-12x} e^{t^2}\, dt.$

---

8. Demostrar que la función $x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ es convexa en $\mathbb{R}$. (Recordemos que, según la definición más habitual, que es la que vimos en clase, la función x^2 es convexa y $\ln x$ es cóncava, en sus respectivos dominios.)

---

9. Calcular la integral

$$\int \frac{x^2}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}\, dx \,.$$

---

10. Calcular la integral $I = \displaystyle\int \cosh^2 x \operatorname{senh}^3 x\, dx$. (Conviene utilizar las relaciones básicas entre las funciones hiperbólicas.)

---

11. Hallar los puntos de máximo y mínimo de la función $f(x) = x^3 - 3\,x^2 - 9\,x + 1$ en el intervalo $[0, 6]$ y los valores correspondientes. Explicar por qué se alcanzan esos valores extremales.

---

12. Demostrar que la tangente a la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{3x^2}{e} - \cos^2 x$ es horizontal en algún punto $c \in \mathbb{R}$.

---

13. Consideremos un rectángulo con un lado en el eje x, otro en el eje y, con un vértice en el origen y con otro en la recta $y = (6-x)/2$. ¿Qué longitud y ancho debe tener el rectángulo para que su área sea máxima?
