Análisis Matemático I

Grado en Tecnología y Servicios de Ingeniería de Telecomunicación, 2010-11

HOJA 8 DE PROBLEMAS

Los números complejos: operaciones aritméticas, módulo, conjugación

1. Escribir los siguientes números complejos en la forma habitual $a + bi$, a, $b \in \mathbb{R}$:

$$(x - yi)^2\,, \qquad \frac{1}{2i}\,, \qquad \frac{1}{3-4i}\,, \qquad \frac{2+3i}{5+12i}\,.$$

2. Determinar todos los números reales a y b para los que se cumple $(i-1)a + (1+2i)b = 1$.

3. Determinar $|2+3i|$, $|5-12i|$, $|(a+b)+(a-b)i|/\sqrt{2}$, donde a, $b \in \mathbb{R}$.

4. Hallar el módulo y el número conjugado de $z = \dfrac{(4+3i)(1-2i)}{(12+5i)}$.

5. (a) Hállense todos los valores de i^n, para $n = 1, 2, \ldots$ ¿Cuántos valores distintos hay?

(b) Calcúlese $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2010}$, sin mucho trabajo.

(c) Hállese el valor $\displaystyle\sum_{n=1}^{2011} i^n$.

6. Comprobar las siguientes propiedades de los números complejos z, w:

(a) $|zw| = |z| \cdot |w|$.

(b) $\mathrm{Re}\,\{az\} = a\,\mathrm{Re}\,z$ si y sólo si a es un número real o $z = 0$.

(c) Dar un ejemplo que demuestre que, en general, la afirmación $\mathrm{Re}\,z \cdot \mathrm{Re}\,w = \mathrm{Re}\,\{z \cdot w\}$ es falsa.

(d) ¿Qué relación existe entre $\mathrm{Im}\{\overline{z}\}$ e $\mathrm{Im}\{z\}$?

7. Demostrar que $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$. Interpretar geométricamente, mediante el dibujo apropiado, esta identidad, conocida como la Ley del Paralelogramo.

Los números complejos: representación polar, fórmula de A. de Moivre

8. Representar en forma polar y de la manera más explícita posible, los siguientes números complejos: $-i$, $\quad 1+\sqrt{3}i$, $\quad -1+i$, $\quad 4+3i$.

9. Hállense el módulo y el argumento de los números $z = 3+4i$ y $w = (-1+i)^2$.

10. Usando la forma polar de los números complejos en cuestión, simplificar las siguientes expresiones:

$$(1+i)^{14}, \qquad (-1+\sqrt{3}i)^6, \qquad (\sqrt{3}+i)^6(1-i)^8, \qquad (\cos\frac{\pi}{12}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{12})^{20}.$$

11. Verificar la identidad $1/(\cos\varphi + i\,\mathsf{sen}\,\varphi) = \cos\varphi - i\,\mathsf{sen}\,\varphi$.

12. Demostrar que $\mathrm{sen}\,3x = 3\mathrm{sen}\,x - 4\mathrm{sen}^3 x$, $x \in \mathbb{R}$.