Análisis Matemático I

Grado en Tecnología y Servicios de Ingeniería de Telecomunicación, 2010-11

HOJA 7 DE PROBLEMAS

Integrales impropias

1. Demostrar que convergen y calcular las siguientes integrales impropias:

$$\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx\,, \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}\,, \quad \int_{\ln 3}^{+\infty} xe^{-x^2}dx\,, \quad \int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx\,.$$

2. Calcular la integral impropia $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. ¿Por qué es una integral impropia?

3. (a) Comprobar que la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$ converge, mientras que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ diverge.

(b) Verificar que la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^3}\,dx$ diverge, mientras que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ converge.

4. ¿Son convergentes las integrales $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\log^2 x}\,, \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\log^{1/3} x}$? En caso de convergencia, hállense sus valores exactos.

Series infinitas

5. Para cada una de las series infinitas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2+1}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^{n+1}}{n^2}\,, \qquad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2}{\log(n-1)}$$

se pide escribir los cuatro primeros términos, a_n, y las cuatro primeras sumas parciales, S_n.

6. Escribir la fórmula más sencilla posible del término n-ésimo, a_n, de las siguientes series:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\dots\,, \qquad \frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\frac{9}{10}+\dots\,,$$

Calcular también, en ambos casos, las sumas parciales, S_n, $1 \le n \le 5$.

7. Comprobar que las siguientes series son "telescópicas":

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\frac{n}{n+1}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}\,,$$

estudiar su converengecia y, si procede, hallar las sumas correspondientes.

8. Utilizando el criterio del término general, comprobar que son divergentes las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{3n-1}\,, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}\,.$$

9. Sumar las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{5^n}\,, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \pi^{n/2} e^{-n}\,, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \left(4\cdot(0,1)^n + (-0,7)^n\right),$$

justificando previamente su convergencia.

Series de potencias y series de Taylor

10. Determinar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n\,,$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n!)^3}\,,$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!(x+\pi)^n\,,$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{\ln(n+1)}\,.$

11. Desarrollar en serie de Taylor (centrada en el origen) las funciones

$$f(x) = x^2 \operatorname{sen} x\,, \qquad g(x) = e^{2x}\,, \qquad h(x) = \cosh x\,, \qquad F(x) = \frac{x}{1-x}\,.$$

En cada caso, indicar el intervalo de convergencia.

12. (a) Hallar el dominio de definición de la función f dada como serie de potencias: $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

(b) Calcular la derivada $f'(x)$ en dicho intervalo y usar la conclusión obtenida para determinar la función $f(x)$ explícitamente.

13. Comprobar que la función $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$ cumple la ecuación diferencial ordinaria lineal

$$f'(x) = 2xf(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

¿De qué función se trata?