Análisis Matemático I

Grado en Tecnología y Servicios de Ingeniería de Telecomunicación, 2010-11

HOJA 6 DE PROBLEMAS

Función inversa, derivación e integración. Fracciones simples (parciales)

1. Usar el teorema de la función inversa para calcular la derivada de la función $f(y) = \sqrt[n]{y}$, $y > 0$, $n \geq 2$.

2. Esbozar la gráfica de la función arco coseno: $g(x) = \operatorname{arc}\cos x$, $-1 \leq x \leq 1$. Usando el teorema de la función inversa, hallar también su derivada en $x \in (-1, 1)$.

3. Evaluar las integrales

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}\,, \qquad \int \frac{dx}{x^2+9}\,, \qquad \int \frac{dx}{x^2+2x+2}\,, \qquad \int \frac{dx}{9\,x^2+6\,x+5}\,.$$

4. Calcular las integrales indefinidas $\displaystyle\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx$ y $\displaystyle\int \operatorname{arc\,sen} x\,dx$, integrando por partes.

5. Representar las siguientes funciones racionales como sumas de fracciones simples (parciales) y calcular sus funciones primitivas:

$$\frac{2x}{x^2-1}\,, \qquad \frac{x}{(x-1)^2\,(x^2+3)}\,, \qquad \frac{3}{(x-1)(x^2+9)}\,.$$

6. Evaluar las siguientes integrales y comentar las diferencias entre ellas:

$$\int \frac{(2x-1)\,dx}{x^2-x+1}\,, \quad \int \frac{x\,dx}{x^2-x+1}\,, \quad \int \frac{dx}{x^2-x+1}\,.$$

Integrales definadas; áreas. Teorema fundamental del Cálculo. Técnicas de integración

7. Evaluar las siguientes integrales definidas:

$$\int_{-1}^{1} (x^2-x+1)\,dx\,, \qquad \int_0^{\pi/2} (2\cos x - \operatorname{sen} x)\,dx\,, \qquad \int_{-\sqrt{3}}^{1} \frac{dx}{1+x^2}\,.$$

8. Calcular el área entre la gráfica de la función f y el eje x en el intervalo indicado:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $1 \leq x \leq 4$.

(b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $-\dfrac{1}{2} \leq x \leq \dfrac{1}{2}$.

9. Calcular el área entre las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ cuando:

(a) $f(x) = x^2 - 2x,\ \ g(x) = -x^2$;

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x},\ \ g(x) = 4 - x$;

10. Evaluar las sigiuentes integrales definidas

$$\int_0^1 (6\,x^2 - 8)^{25}\, x\, dx\,, \qquad \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{2\,e^x - 1}\, dx\,, \qquad \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x}{1 + x^4}\, dx\,,$$

aplicando un cambio de variable adecuado.

11. Evaluar las integrales definidas

$$\int_{\ln 2}^0 e^x \cos e^x\, dx\,, \qquad \int_0^1 x\, e^{-x^2}\, dx\,, \qquad \int_{1/e}^1 \frac{e^{1/x}}{x^2}\, dx\,.$$

12. Calcular las siguientes integrales:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x + 8}\, dx\,, \qquad \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dx}{\cos x}\,, \qquad \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x}\, dx\,.$$

13. Determinar el valor de cada una de las integrales

$$\int_1^e \ln x\, dx\,, \qquad \int_0^1 \operatorname{arc\,tg} x\, dx\,, \qquad \int_0^{\ln 3} x e^{-x}\, dx\,,$$

integrando por partes.

14. Calcular de manera rápida las integrales

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \operatorname{sen}(x^5 + x)\, dx\,, \qquad \int_{-2011}^{2011} \operatorname{arc\,tg} x\, dx\,.$$

15. Calcular $\displaystyle\int_0^5 |x - 2|\, dx\,,\ \ \int_1^4 |x^2 - 3x|\, dx\,.$

16. Determinar todos los puntos de discontinuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si} \quad x \le 0\,, \\ 1 - x, & \text{si} \quad 0 < x \le 1\,, \\ \ln x, & \text{si} \quad x > 1\,. \end{cases}$$

Luego calcular $\displaystyle\int_{-1}^2 f(x)\, dx$.

17. Hallar $F'(x)$ cuando la función F viene dada por

(a) $\displaystyle F(x) = \int_1^x \cos(1+2t+t^4)\, dt\,,$ (b) $\displaystyle F(x) = \int_0^{x^2} e^{-t}\, dt\,,$ (c) $\displaystyle F(x) = \int_{x^2}^{e^x + x} \log(t^2+1)\, dt\,.$