Análisis Matemático I

Grado en Tecnología y Servicios de Ingeniería de Telecomunicación, 2010-11

HOJA 5 DE PROBLEMAS

Polinomios de Taylor

1. Para cada una de las funciones $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sqrt{1+x}$, determinar su polinomio de Taylor de segundo orden en los puntos dados:

(a) en $a = 0$; (b) en $a = \pi/2$.

2. Estimar el error de aproximación de la función $f(x) = \cos x$ cerca de $a = 0$ por el polinomio de Taylor de orden 3 y en el punto $x = 1/10$.

3. Calcúlense los polinomios de Taylor P_4 y P_5 para las funciones $f(x) = 2\cosh x\,,\;\; g(x) = x^2 \cos x$ centrados en el punto $a = 0$.

4. Dar una posible estimación para el error cometido al aproximar $f(x) = e^{-x}$ por su polinomio de Taylor $P_3(x)$ en $a = 1$. Obtener una estimación concreta tomando $x = 1,1$.

5. Determinar el grado del polinomio de Taylor P_n centrado en $a = 1$ que debe usarse para aproximar $\ln 1,2$ de manera que el error de aproximación sea menor que $0,001$.

Teoremas de Rolle y del valor medio

6. ¿Es cierto que existe algún punto $c \in (-2, 2)$ en el que la derivada de la función $f(x) = x^4 - 2x^2$ es nula? ¿Qué resultado nos garantiza esto? Hallar todos los puntos con la propiedad indicada.

7. Dada la función $f(x) = 5 - \dfrac{4}{x}$, hallar todos los puntos $c \in (1, 4)$ para los que $f'(c) = \dfrac{f(4) - f(1)}{3}$.

8. Demostrar que la tangente a la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{6x}{\pi} - 4\,\mathrm{sen}^2\, x$ es horizontal en algún punto $c \in (0, \pi/6)$. Comprobar que c cumple $\mathrm{sen}(2c) = 3/(2\pi)$.

9. ¿Son válidas las conclusiones del teorema de Rolle para la función $f(x) = |x|$ en el intervalo $[-1, 1]$? Razonar la respuesta.

Integrales indefinadas (funciones primitivas)

10. Determinar las antiderivadas de las siguientes funciones:

$$f(x) = 5x^4 - 15x^2 + 1\,, \quad g(x) = \cos(2x)\,, \quad F(x) = \mathrm{senh}\, x\,, \quad G(x) = e^{-2x}\,.$$

11. Si una función es diferenciable dos veces y su segunda derivada es cero, deducir que la función es lineal, es decir, que tiene la forma $f(x) = mx + n$, para algunos m, $n \in \mathbb{R}$.

12. (a) Hallar $\displaystyle\int |x|\, dx$. (Conviene distinguir los casos cuando $x > 0$ y $x > 0$ para luego unificarlos en una sola fórmula.)

(b) Escribir correctamente la fórmula para $\displaystyle\int \frac{1}{x}\, dx$, para que incluya ambos casos $x > 0$ y $x < 0$.

13. Mediante un cambio de variable adecuado, calcular las integrales indefinidas

$$\int \frac{3x^2+1}{(x^3+x)^5}\, dx\,, \qquad \int \frac{3x^2+1}{x^3+x}\, dx\,, \qquad \int \frac{\ln^3 x}{x}\, dx\,.$$

14. Evaluar las integrales

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4+2}}\, dx\,, \qquad \int \frac{1}{4+x^2}\, dx\,, \qquad \int \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\, dx\,.$$

15. Evaluar las siguientes integrales indefinidas

$$\int (6\,x^2-8)^{25}\, x\, dx\,, \quad \int \frac{e^x}{2\,e^x-1}\, dx\,, \quad \int \frac{x}{1+x^4}\, dx\,.$$

16. Calcular las siguientes integrales de funciones trigonométricas o hiperbólicas

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x + 8}\, dx\,, \quad \int \operatorname{sen} x\, \cos^6 x\, dx\,, \quad \int \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}\, dx\,.$$

usando un cambio de variable conveniente.

17. Calcular las siguientes integrales indefinidas

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, \cos^3 x\, dx\,, \quad \int \operatorname{sen}^3 x\, \cos^6 x\, dx\,, \quad \int \frac{dx}{\cos x}\,, \quad \int \frac{dx}{\cos^3 x}\,,$$

utilizando las relaciones básicas entre las funciones seno y coseno.

18. Determinar las integrales

$$\int \ln(x+1)\, dx\,, \qquad \int xe^{-2x}\, dx\,, \qquad \int \operatorname{arc\,tg} x\, dx\,, \qquad \int x^2 e^x\, dx\,, \qquad \int e^x \cos x\, dx$$

integrando por partes una o más veces, si fuese necesario.

19. Evaluar las integrales

$$\int \frac{dx}{x^2+9}\,, \qquad \int \frac{dx}{9\,x^2+6\,x+5}\,.$$