Análisis Matemático I

Grado en Tecnología y Servicios de Ingeniería de Telecomunicación, 2010-11

HOJA 4 DE PROBLEMAS

Derivadas de orden superior. Significado físico de las derivadas

1. Compruébese que para la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \geq 0, \\ -x^2, & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

existe $f'(x)$ en todo $x \in \mathbb{R}$ y escríbase la fórmula explícita (¿qué función es?). Compruébese que, no obstante, no existe $f''(0)$.

2. Calcular $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ y $f^{IV}(x)$ y luego generalizar la fórmula a $f^{(n)}(x)$ cuando

(a) $f(x) = ax^2 + bx + c\,,$ (b) $f(x) = e^{2x}\,,$ (c) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}\,.$

3. Se definen las funciones elementales *seno hiperbólico* y *coseno hiperbólico* como

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,, \qquad \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,,$$

respectivamente, para $x \in \mathbb{R}$.

(a) Verificar que $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) Comprobar que $(\cosh x)' = \operatorname{senh} x$ y $(\operatorname{senh} x)' = \cosh x$.

(c) Calcular $\cosh x^{(n)}$ para cualquier número $n \in \mathbb{N}$.

4. Se deja caer una bola de billar desde una altura de $29,4$ metros. Su altura s en el instante t se representa mediante la función de posición $s = -4,9t^2 + 29,4$.

(a) ¿Cuánto tarda la bola en llegar al suelo?

(b) Hallar su velocidad media en el intervalo de tiempo $[0, 2]$.

(b) Hallar la velocidad de la bola en el instante $t = 1$ y en el momento de impacto.

(c) Calcular la aceleración de la bola en el instante $t = 1$ y en el momento $t = 2$.

Máximos y mínimos en intervalos abiertos. Análisis de la gráfica

5. Para la función f dada, hallar y clasificar sus puntos críticos y sus mínimos y máximos (indicando si son locales o globales) y determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los intervalos donde es convexa o cóncava y los puntos de inflexión.

(a) $f(x) = x^2 - 3x + 2\,;$ (b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2\,;$

(c) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1\,;$ (d) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x + 5\,.$

6. Estudiar y esbozar la gráfica de la función:

(a) $f(x) = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 64x$; (b) $g(x) = 2 - x - x^3$; (c) $u(t) = t^5 - 5t$.

7. Hágase lo mismo para las funciones

$$f(x) = x \ln x\,, \quad g(x) = xe^{-2x}\,, \quad h(x) = x^2 e^{-x}\,, \quad F(x) = x - \ln x\,.$$

8. Analizar y dibujar las gráficas de las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4}\,, \qquad g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}\,, \qquad h(x) = \frac{2 + x - x^2}{(x-1)^2}\,, \qquad F(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 2}\,.$$

Aparte de las posibles asíntotas horizontales y verticales, determinar también las oblicuas, si procede.

9. Demostrar que la ecuación $6\,x^5 + 13\,x + 1 = 0$ tiene exactamente una raíz real.

(*Sugerencia.* Analizar la derivada de la función apropiada y utilizar el teorema de Bolzano del valor intermedio.)

10. Demostrar que la ecuación $6\,t^4 - 7\,t + 1 = 0$ tiene exactamente dos raíces reales distintas, ambas simples.

Extremos en intervalos cerrados. Problemas de aplicación de máximos y mínimos

11. Hallar los valores máximos y mínimos de la función en el intervalo indicado:

(a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 15,\ \ 0 \le x \le 3$; (b) $f(x) = 3 - |x - 2|,\ \ x \in [1, 4]$;

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x(1-x)},\ \ 2 \le x \le 3$; (d) $f(x) = 5x^{2/3} - x^{5/3},\ \ x \in [-1, 4]$.

12. Sean a y b dos números cuya suma es igual a 6. Demostrar que la suma $a^2 + b^2$ es mínima cuando $a = b = 3$.

13. ¿Qué puntos de la gráfica de $y = 4 - x^2$ son más cercanos al punto $(0, 2)$? Razonar la respuesta.

14. Un fabricante quiere diseñar una caja abierta que tenga una base cuadrada, un área superficial de 108 cm^2 y el máximo volumen posible. ¿Qué dimensiones debe tener la caja?

15. Un rectángulo está delimitado por el eje x y el semicírculo $y = \sqrt{25 - x^2}$. ¿Qué largo y ancho debe tener el rectángulo para que su área sea máxima?

16. Un ganadero tiene 200 m de vallado con los que delimita dos corrales rectangulares adyacentes. ?Qué dimensiones debe utilizar para que el área delimitada sea máxima?