Análisis Matemático I

Grado en Tecnología y Servicios de Ingeniería de Telecomunicación, 2010-11

HOJA 3 DE PROBLEMAS

Continuidad

1. Estudiar la existencia de los límites laterales y la continuidad en los puntos $x = 0$ y $x = 3$ de las funciones definidas como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x > 0, \\ -x, & \text{si } x \le 0, \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} 2e, & \text{si } x > 3, \\ e^x, & \text{si } 0 < x \le 3, \\ -x+1, & \text{si } x \le 0. \end{cases}$$

2. Decídase la continuad o no (en su caso, por la derecha o por la izquierda) en el punto $x = 1$ de las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}+5}{\sqrt{x-1}-2}\,, \qquad g(x) = \ln(x-1)\,, \qquad h(x) = \sqrt[3]{x-1}\,.$$

3. Determinar todos los puntos de continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|}\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x}, & \text{si } x \ne 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$

4. Hallar todos los puntos de continuidad de la función $h(x) = \sqrt{-x^2+7x-6}$.

5. Demostrar que cada una de las siguientes funciones tiene un cero en el intervalo $[0, 1]$:

$$f(x) = -x^4 + 8x - 6\,; \qquad g(x) = e^{3x^2} - 1\,; \qquad h(x) = \frac{x^4 - 3\sqrt{x}+1}{x^5+6x+1}\,.$$

6. Demostrar que la ecuación $\cos x - \dfrac{10x}{\pi} = -e$ tiene solución en el intervalo $(0, \pi/2)$.

7. Sea f una función continua en el intervalo $[0, 1]$ tal que $f(0) = 1$ y $f(1) = 0$. Demuéstrese que existe $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = \sqrt{c}$.

Derivadas. Propiedades básicas. Reglas de la cadena y de L'Hôpital

8. Calcular la derivada de la función f *por definición*:

$$f(x) = x^2 - 5x\,, \qquad f(x) = e^x\,, \qquad f(x) = \sqrt{x+1}\,.$$

9. Usando los resultados del ejercicio anterior, hallar la ecuación de la tangente a la gráfica de la función

(a) $f(x) = x^2 - 5x$ en el punto $(1, -4)$;

(b) $f(x) = x^3$ en $(0, 0)$ y en $(2, 8)$.

(c) $y = \sqrt{x+1}$ en el punto donde $y = 3$.

10. Determinar el valor del parámetro real a para que la tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 5ax$ en el origen: (a) sea horizontal; (b) tenga pendiente -1.

11. Decidir razonadamente la diferenciabilidad en: (a) $x = 0$; (b) $x = 3$; (c) $x = -1$ de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } -1 \le x \le 0, \\ x+1, & \text{si } x < -1, \end{cases}$$

12. ¿En qué puntos *no* es diferenciable la función $y = |x(x-2)|$? Razónese la respuesta.

13. Usar las fórmulas y propiedades básicas vistas en clase para calcular la derivada $\dfrac{df}{dx}$ de cada una de las siguientes funciones:

$$f(x) = 5x^2 - 3x + 2009 + ex^{-3/4}, \qquad f(x) = \pi x^3 - x \ln x, \qquad f(x) = (x^2 + 5x)e^x .$$

14. Hallar la derivada y' en cualquier punto del dominio de la función si

$$\text{(a) } y = \frac{xe^x}{x^2 - 1}; \qquad \text{(b) } y = \frac{\ln x}{e^x}; \qquad \text{(c) } y = \sqrt{x} \ln x .$$

15. Utilizando la regla de la cadena y otras propiedades básicas, calcular $f'(x)$ donde exista, para las siguientes funciones:

$$f(x) = e^{x^2}; \qquad f(x) = (x^2 - 3x + 2)^{2010}; \qquad f(x) = \ln(x^2 - 3x); \qquad f(x) = x^2 e^{3x-1} .$$

16. Sabiendo que las funciones f y g y sus derivadas cumplen $g(-3) = 0$, $g'(-3) = 4$ y $f'(0) = 11$, ¿podemos calcular el valor de $(f \circ g)'(-3)$?

17. Hallar $f'(x)$ donde exista: (a) $f(x) = 3^x$, (b) $f(x) = x^x$, (c) $f(x) = x^{x^2+2x}$.

18. Calcular los siguientes límites usando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cdot (e^{2x} - 1)}{x^2}, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{sen} bx}, \qquad \lim_{x \to 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1} .$$

19. Calcular los siguientes límites utilizando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{7x^3 - 12x^2 + 5x - 2}{2x^3 + x - 15}, \qquad \lim_{x \to +\infty} (x^4 + 7x^2 - x + \pi)e^{-2x}, \qquad \lim_{x \to 0^+} x^2 \ln x, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1+x}}{x} .$$

20. Evaluar los límites

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x}\sqrt{x}, \qquad \lim_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right), \qquad \lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x}, \qquad \lim_{x \to 0^+} (\operatorname{sen} x)^x .$$

21. (a) Sea r un número fijo tal que $0 < r < 1$. Aplicando la regla de L'Hôpital y dando por hecho que $\lim\limits_{x \to +\infty} r^x = 0$, demostrar que

$$\lim_{x \to +\infty} x r^x = 0 .$$

(b) Deducir del apartado anterior que $\lim\limits_{n \to \infty} n r^n = 0$.