Análisis Matemático I
Grado en Ing. de Telecomunicación, 2010-11

HOJA 2 DE PROBLEMAS

Funciones elementales y sus gráficas

1. Para cada una de las funciones dadas abajo, hallar su dominio de definición.

$$\text{(a) } f(x) = \frac{x+4}{x-3}\,; \qquad \text{(b) } f(x) = \frac{1}{x^2-1}\,; \qquad \text{(c) } f(x) = \sqrt{x^2-1}\,.$$

2. Hallar los dominios de definición de las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-4}}{x-3}\,; \qquad g(x) = \frac{x+4}{x^2-4x+3}\,; \qquad h(x) = \frac{x+4}{\sqrt{x^2-4x+3}}\,.$$

3. Esbozar la gráfica de la función: (a) $f(x) = 5x-2\,;$ (b) $y = x^2-3x+4;$ (c) $y = -2x^2-4x+6\,.$

4. Hágase lo mismo para las funciones

$$\text{(a) } f(x) = |5x-2|\,; \qquad \text{(b) } g(x) = x^3+6x^2+12x+8\,; \qquad \text{(c) } h(x) = -\sqrt{x-5}\,.$$

5. Explíquese razonadamente si el conjunto de todos los puntos en el plano que satisfacen la ecuación:
(a) $y^2 = x^2$; (b) $y^3 = x$
es la gráfica de una función $y = f(x)$ o no.

6. (a) Observando la gráfica de $f(x) = e^x$, dedúzcase la desigualdad $1 + x \le e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
(b) Lo mismo para $\ln(1 + x) < x$, para todo $x > 0$.

7. Esbozar la gráfica de la función $f(x) = -e^{x+1} + 3$. Hágase lo mismo para $g(x) = \ln|x|$.

8. Dibujar las gráficas de $f(x) = 2\cos x + 1$, $g(x) = \cos(\pi x)$ y $h(x) = \operatorname{tg}(x + \pi)$.

9. Decídase razonadamente si es par o impar cada una de las siguientes funciones:

$$\text{(a) } f(x) = x^2-4\,; \qquad \text{(b) } g(x) = \sqrt{x^2-4}\,; \qquad \text{(c) } h(x) = x^2-4x\,; \qquad \text{(d) } F(x) = \sqrt[3]{x}\,.$$

10. Hágase lo mismo para las funciones $u(x) = x^5 - 3x,\ v(x) = \sqrt{9-x^2},\ w(x) = \cos(\pi x)$.

11. Dadas las funciones f y g, hallar cada una de las funciones compuestas $f \circ g$ y $g \circ f$, simplificando las expresiones finales, y determinar sus dominios de definición:

$$\text{(a) } f(x) = |x-2|\,,\ g(x) = x^2+1\,; \qquad \text{(b) } f(x) = e^x\,,\ g(x) = x^2-3\,; \qquad \text{(c) } f(x) = \sqrt{x}\,,\ g(x) = x^2\,.$$

Límites de algunas funciones elementales

12. Comprobar formalmente (por sucesiones): (a) $\lim_{x\to -1} 3x = -3$; (b) $\lim_{x\to 5} \sqrt{x-4} = 1$.

13. Decídase razonadamente si existe o no el límite $\lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$.

14. Calcular los siguientes límites (sin usar la regla de L'Hopital, que se verá más adelante):

$$\text{(a)} \lim_{x\to -1} \frac{x^2+x+2}{x-1}\,; \qquad \text{(b)} \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1}\,; \qquad \text{(c)} \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}\,.$$

15. Determinar los límites

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^2-4}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\,, \qquad \lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+4}}{x^2+4\,x+3}\,,$$

sin usar L'Hopital.

16. Calcular los siguientes límites utilizando las reglas vistas en clase:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}\,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x\cdot(e^{2x}-1)}{x^2}\,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 3x}\,.$$

17. Demostrar que la función $f(x) = x^2\cos(3x)$ tiene límite cuando $x\to 0$ y hallar su valor. Lo mismo para $\lim_{x\to 0} \sqrt{x}\operatorname{sen}\frac{2}{x}$.

18. Más generalmente, demostrar que si $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x\to 0} g(x)\,\cos\frac{1}{x} = 0$.

19. Determinar los límites

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x^2-4}\,, \qquad \lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x^2-4}\,, \qquad \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-4}{x}\,, \qquad \lim_{x\to 2^+} \sqrt{\frac{x-2}{x^2-4}}\,, \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{|x-1|}{x-1}\,.$$

20. Calcular los límites $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+7}{x+3}$, $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{3+x}}{x}$, $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}-x+1}{\sqrt{x}+x-1}$.

21. Decidir si existen los límites

$$\lim_{x\to 1} \frac{|x-1|}{x-1}\,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{|x+1|-|x-1|}{x}$$

y hallar su(s) valor(es), si procede.

22. Encontrar las constantes a y b para las cuales se tiene:

$$\text{(a)} \lim_{x\to \infty} (\sqrt{x^2+x+1} - a\,x - b) = 1\,, \qquad \text{(b)} \lim_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2+x+1} - a\,x - b) = 1\,.$$