**Análisis Matemático I**

Grado en Ing. de Telecomunicación, 2010-11

HOJA 1 DE PROBLEMAS

## Los números reales. Factorizaciones, desarrollos binomiales, ecuaciones básicas

**1**. ¿Cuál de los números $1+2\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ es racional? Razonar la respuesta.

**2**. Demuéstrese que

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots (-1)^n \binom{n}{n} = 0\,.$$

**3**. (a) Comprobar que $(n+1)! = (n+1)\cdot n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

(b) Para $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ y $0 \le k \le n-1$, demostrar que

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}\,.$$

¿Qué relación tiene esta identidad con los coeficientes en los desarrollos de $(a+b)^n$ y $(a+b)^{n+1}$?

**4**. Factorizar las siguientes expresiones:

$$x^2 - y^6\,, \qquad 9x^2 - 16\,, \qquad 8 - x^3\,, \qquad 27x^3 + 1\,.$$

**5**. Hallar las soluciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas de dos maneras (usando la fórmula y completando el cuadrado):

$$x^2 - 4x - 12 = 0\,, \quad x^2 - x - 1 = 0\,, \quad 2x^2 - 3x - 5 = 0\,.$$

**6**. ¿Para qué valores del parámetro real $a$ tiene la ecuación $x^2 - (2a+1)x + a^2 = 0$ una única solución real?

**7**. Usando las fórmulas de factorización conocidas, determinar todas las soluciones reales de la ecuación cúbica $x^3 + 8 = 0$.

## Desigualdades. Valor absoluto

**8**. Escribir como una desigualdad doble la siguiente desigualdad: $|a-2| < 3$, simplificando la forma final.

**9**. Hallar todos los $x \in \mathbb{R}$ para los que se cumplan las siguientes desigualdades:

$$\text{(a) } (x-1)(x+3) \ge 0\,; \qquad \text{(b) } \frac{x^2+4}{x^2-2x} < 0\,; \qquad \text{(c) } (2x-1)^2 < 1\,; \qquad \text{(d) } \sqrt{(2x-1)^2} < 1\,.$$

**10**. Comprobar que $x^2 - x + \frac{1}{4} \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Lo mismo para $x^4 + \frac{1}{x^4} \geq 2$ para todo $x \neq 0$.

**11**. Usando la desigualdad de Bernoulli vista en clase, demuéstrense las desigualdades

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 + \frac{1}{n}, \qquad \sqrt[n]{3} \leq 1 + \frac{2}{n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Convergencia de sucesiones**

**12**. Escribir los 5 primeros términos de cada una de las sucesiones $a_n = (-1)^n + 2$, $b_n = 2^{-n+1}$, $c_k = \dfrac{k-1}{k+1}$.

**13**. Hállese la fórmula para $a_n$ si los 5 ó 6 primeros términos de la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ son:

$$\text{(a) } 1, 4, 9, 16, 25, 36\,; \qquad \text{(b) } 1, 3, 1, 3, 1, 3\,; \qquad \text{(c) } \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \frac{1}{720}\,; \qquad \text{(d) } 1, -\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \frac{16}{81}\,.$$

**14**. ¿Cuáles de las siguientes sucesiones son convergentes? Explíquese la respuesta usando la definición.

$$a_n = \frac{1}{2^n}\,; \qquad b_n = \sqrt{n}\,; \qquad c_n = 3 + (-1)^n\,.$$

**15**. Teniendo en cuenta los límites básicos vistos en clase, hallar los siguientes límites y explicar la respuesta:

$$\text{(a) } \lim_{n\to\infty} 0{,}2011^n\,; \qquad \text{(b) } \lim_{n\to\infty} \frac{(-5)^n}{12^{n+1}}\,; \qquad \text{(c) } \lim_{k\to\infty} \left(\frac{3}{\pi}\right)^k\,; \qquad \text{(d) } \lim_{k\to\infty} e^{1/(k+1)}\,.$$

**16**. Determinar los siguientes límites:

$$\text{(a) } \lim_{n\to\infty} \frac{8n^2 - 7n}{2n^2 + 5}; \qquad \text{(b) } \lim_{n\to\infty} \frac{8n^2 - 7n}{2n^3 + 5}; \qquad \text{(c) } \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) \qquad \text{(d) } \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2 + 7n} - n)\,.$$

**17**. Aplicando el teorema del encaje visto en clase, deducir la existencia y hallar el valor de los siguientes límites:

$$\text{(a) } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!}\,; \qquad \text{(b) } \lim_{n\to\infty} \frac{2\cos(3n) + 5\,\mathrm{sen}(n^2)}{n+1}\,; \qquad \text{(c) } \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 2^{-n} + \cos(n!)}{\sqrt{n}}\,.$$

**18**. Determinar los siguientes límites:

$$\text{(a) } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n^3}\,; \qquad \text{(b) } \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{\frac{3}{2}} + \pi^{-1/n}\right)\,; \qquad \text{(c) } \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[2n]{e} + e^{-n}\right)\,.$$

**19**. Evaluar los límites

$$\text{(a) } \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\,; \qquad \text{(b) } \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n\,; \qquad \text{(c) } \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{2n}\,.$$

**20**. Comprobar que las siguientes sucesiones divergen. Estudiar si tienden a uno de los símbolos $+\infty$ o $-\infty$, o si son "oscilantes".

$$a_n = \frac{n^3}{10n^2 + 2009}\,; \quad b_k = -k^2\,; \quad c_n = \frac{1 + (-1)^n}{3 - (-1)^n}\,; \quad x_m = (-2)^m\,.$$