

Las preguntas 1–13 son de tipo test. Se pide elegir una única respuesta en cada problema y apuntarla en la tabla de la página anterior.

Cada respuesta correcta vale 6 puntos, incorrecta o doble: -1 punto, respuesta en blanco: 0 puntos.

1. El valor del límite $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3n + 4} - \sqrt{n^2 + n + 1})$ es:

- (A) 0; (B) $\frac{3}{2}$; (C) 1; (D) $\frac{1}{2}$; (E) $+\infty$; (F) otro valor.
-

2. La curva de nivel $h = 5$ de la función $f(x, y) = x^2 + 4y^2 + 5$ es:

- (A) una hipérbola; (B) una elipse; (C) una parábola;
(D) unión de dos rectas; (E) un punto; (F) \emptyset .
-

3. Para la función $f(x) = x e^{-x}$, su polinomio $P_2(x)$ de Taylor de orden 2 en $a = 0$ es el siguiente:

- (A) $1 - x^2$, (B) $x - x^2$, (C) x^2 , (D) $-x^2$, (E) $\frac{x^2}{2}$, (F) $x^2 - \frac{x^3}{3!}$.
-

4. La función $f(x, y) = x^3 + y^2 - xy$ tiene:

- (A) un punto de mínimo local y un punto silla, (B) dos puntos de máximo local,
(C) un punto de máximo y un punto silla, (D) dos puntos de silla,
(E) dos puntos de mínimo local, (F) sólo tiene un punto crítico.
-

5. Para la función

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & \text{si } x \leq 0 \\ \ln(x + 1), & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

sólo una de las siguientes afirmaciones es cierta. ¿Cuál de ellas?

- (A) no existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, (B) existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ pero f no es continua en 0,
(C) f es continua en 0 pero $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$, (D) f es continua en 0 pero $f'(0)$ no existe,
(E) $f'(0)$ existe (como valor finito), (F) $f'(0) = +\infty$.
-

6. El valor de la integral $\int_0^1 \frac{\arctg x}{1 + x^2} dx$ es:

- (A) $\frac{\pi^2}{32}$, (B) $\frac{\pi}{32}$, (C) $\frac{\pi^2}{16}$, (D) $\frac{-\pi^2}{32}$, (E) $\frac{1}{2}$, (F) $\frac{1}{4}$.
-

7. La suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}}$ es:

- (A) 3, (B) $\frac{2}{3}$, (C) 1, (D) $\frac{1}{3}$, (E) $\frac{3}{2}$, (F) ninguna de los anteriores.
-

8. Los puntos de inflexión de la función $f(x) = x^2 e^{-x}$ son los siguientes:

- (A) $2 - \sqrt{2}$, (B) $2 + \sqrt{2}$, (C) ambos valores $2 \pm \sqrt{2}$,
(D) sólo 0, (E) ambos puntos $2 \pm \sqrt{2}$ y 0, (F) f no tiene puntos de inflexión.
-

9. Dadas las series infinitas

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}, \quad \sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(3n^2 + 1)}{3n^2 + 1},$$

podemos afirmar que:

- (A) ambas convergen absolutamente, (B) S converge condicionalmente y σ absolutamente,
(C) S diverge y σ converge absolutamente, (D) ambas divergen,
(E) ambas convergen condicionalmente, (F) S diverge y σ converge condicionalmente.
-

10. Consideremos los siguientes límites

$$L = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{5xy}{2x^2 + 3y^2}, \quad M = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \cos \frac{5xy}{2x^2 + 3y^2}.$$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

- (A) $L = 1$, M no existe; (B) $L = +\infty$, M no existe; (C) ninguno de los dos existe;
(D) L no existe y $M = 0$; (E) $L = 1$, $M = 0$, (F) $L = +\infty$, $M = 0$.
-

11. El área de la región en el plano acotada por las curvas $y = x^2 - 2x + 1$, $y = 1 - x^2$ es igual a:

- (A) π , (B) $1/2$, (C) $1/3$, (D) $2/3$, (E) 1, (F) otro valor.
-

12. El valor del límite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x^2)^{1/x}$$

es:

- (A) e , (B) 0, (C) 1, (D) e^2 , (E) $+\infty$.
-

13. $\int_0^1 \int_0^1 x e^{xy} dx dy =$

- (A) e^2 ; (B) e ; (C) 2; (D) $e - 2$; (E) $2e$, (F) otro valor.
-

Segunda Parte

Los siguientes ejercicios son de desarrollo. Se pide presentar una solución muy breve pero razonada, indicando los detalles y el método utilizado. En los cálculos, se pide simplificar la respuesta final.

14. [11 puntos] Dada la función $f(x, y) = \operatorname{sen}(x^2 + \lambda y) + x$, determinar λ para que el vector gradiente $\nabla f(0, 0)$ sea ortogonal al vector $(1, -4\lambda)$.

15. [11 puntos] Sea $F(x) = \int_0^{x^3-x} e^{-t^2} dt$. Calcular razonadamente $F'(1)$.