Análisis Matemático II (Ing. de Telecomunicación), 2009-10
Examen final extraordinario, 02/06/2011

PUNTUACIÓN DEL EXAMEN:

P. 1–12	13	14	TOTAL

DATOS IMPRESCINDIBLES:

Inicial del primer apellido: ________

NOMBRE: ________________________

APELLIDOS: ____

D.N.I. O PASAPORTE: ________________________

FIRMA: ____

RESPUESTAS

Primera Parte

Las respuestas se tendrán en cuenta sólo si se escriben en el lugar correspondiente en la tabla de abajo y con letra clara.

Problema	P. 1	P. 2	P. 3	P. 4	P. 5	P. 6	P. 7	P. 8	P. 9	P. 10	P. 11	P. 12
Respuesta	C	B	E	A	D	C	F	F	D	F	A	C

ALGUNAS FÓRMULAS ÚTILES:

Algunas sumas conocidas:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{\pi^2}{6} \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} &= \frac{\pi^4}{90} \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} &= \log 2 \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} &= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Tabla de transformadas de Fourier:

$u(t)$	$\mathcal{F}u(x) = \widehat{u}(x)$
$\dfrac{1}{t^2+1}$	$\pi e^{-\lvert x \rvert}$
e^{-t^2}	$\sqrt{\pi} e^{-x^2/4}$
$\begin{cases} 1, & \text{si } \lvert t \rvert < s, \\ 0, & \text{si } \lvert t \rvert > s. \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{2}{x} \operatorname{sen} sx, & \text{si } x \neq 0, \\ 2s, & \text{si } x = 0. \end{cases}$
$\begin{cases} e^{-t}, & \text{si } t \geq 0, \\ 0, & \text{si } t < 0. \end{cases}$	$\dfrac{1-ix}{1+x^2}$
$u(t) = \begin{cases} 1+t, & \text{si } -1 \leq t \leq 0, \\ 1-t, & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & \text{en el resto}. \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{2(1-\cos x)}{x^2}, & \text{si } x \neq 0, \\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Primera Parte

Las preguntas 1–12 son de tipo test. Se pide elegir una única respuesta en cada problema y apuntarla en la hoja de respuestas.
Cada respuesta correcta vale 6 puntos, incorrecta o doble: -1 punto, respuesta en blanco: 0 puntos.

---

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt =$

(A) e; (B) π^2; (C) $\frac{\pi}{2}$; (D) 1; (E) 0; (F) $\frac{1}{2}$.

---

2. Dada la función f mediante la fórmula:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - x, & \text{si } -\pi \le x < 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{si } x = 0, \\ x^2 + \pi, & \text{si } 0 < x \le \pi, \end{cases}$$

su serie de Fourier en $x = 0$ converge al siguiente valor:

(A) $\frac{\pi}{4}$; (B) $\frac{\pi}{2}$; (C) 0; (D) $-\frac{\pi}{4}$; (E) $-\frac{\pi}{2}$; (F) a otro valor.

---

3. El radio de convergencia de la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^3 e^n}$ es igual a:

(A) 0, (B) $+\infty$, (C) 1, (D) $\frac{1}{e}$, (E) e, (F) otro valor.

---

4. El valor exacto de

$$\left| \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^{2011} \right|$$

es:

(A) 1, (B) -1, (C) $\sqrt{2}$, (D) $\sqrt{2}^{2011}$, (E) 2^{2011}, (F) otro.

---

5. De las siguientes series:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+1} \right)^n, \quad s = \sum_{n=1}^{\infty} \pi^{-n+1}, \quad \sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1},$$

convergen:

(A) todas; (B) sólo S; (C) sólo s; (D) sólo S y s; (E) sólo s y σ; (F) ninguna.

---

6. Calcular la transformada de Fourier de la función $v(t) = \dfrac{5}{4t^2+1}$:

(A) $\frac{5\pi}{2}e^{-|x|}$, (B) $\frac{\pi}{2}e^{-|x|/2}$, (C) $\frac{5\pi}{2}e^{-|x|/2}$, (D) $10\pi e^{-2|x|}$, (E) $\frac{5\pi}{2}e^{-2|x|}$, (F) $\pi e^{-x^2/4}$.

---

7. De entre las siguientes integrales impropias:

$$I = \int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^3 x} dx \,, \qquad J = \int_e^{+\infty} \frac{1}{x^2} \,, \qquad K = \int_e^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln x} dx$$

convergen

(A) sólo I y J; (B) sólo J y K; (C) sólo J;
(D) sólo I y K; (E) ninguna; (F) todas.

---

8. Sea γ la circunferencia unidad, orientada en el sentido positivo. De las siguientes integrales:

$$I = \int_\gamma e^z \, dz \,, \quad J = \int_\gamma \frac{\operatorname{sen} z}{e^z} \, dz \,, \quad K = \int_\gamma \frac{1}{z^2} \, dz \,,$$

¿cuáles son iguales a 0?

(A) Sólo I y J, (B) sólo I, (C) sólo J, (D) sólo I y K, (E) ninguna, (F) todas.

---

9. Dada la función $f(x) = x^2$, $-\pi \le x < \pi$, su coeficiente de Fourier b_4 es igual a:

(A) $\frac{1}{12}$, (B) $\frac{5}{12}$, (C) $\frac{1}{6!}$, (D) 0, (E) $\frac{1}{4!}$, (F) ninguno de los anteriores.

---

10. La función compleja $f(z) = x^3 + i\,y^3$, $z = x + iy$ cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann en los siguientes puntos del plano:

(A) en todo $z \neq 0$, (B) en ninguno, (C) sólo en $z = 0$, (D) en todos los puntos del plano,
(E) sólo en los puntos del eje real, (F) en la unión de dos rectas que se cruzan en el origen.

---

11. Para $|x| < 1$, la suma de la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$ es igual a:

(A) $\frac{x}{(1-x)^2}$, (B) $\log \frac{1+x}{1-x}$, (C) $\frac{1}{1-x}$, (D) $\frac{1}{(1-x)^2}$, (E) $\log \frac{1}{1-x}$, (F) otra función.

---

12. El valor de la integral

$$\int_{|z|=3} \frac{z^2}{z-2i} dz$$

(con la orientación positiva del círculo) es el siguiente:

(A) -8π, (B) -4π, (C) $-8\pi i$, (D) 0, (E) 4π, (F) $-4\pi i$.

Segunda Parte

En los ejercicios **13**–**14** *se pide:*
- presentar una solución breve pero razonada,
- indicar todos los detalles relevantes,
- nombrar (o enunciar) todos los criterios y teoremas que se utilicen.

---

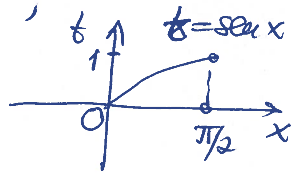
13. [10 puntos] Demostrar que

$$\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} x)^{2011} \cos x (1-\operatorname{sen} x)^{10}\, dx = \frac{10! \cdot 2011!}{2022!}.$$

<u>SOLUCIÓN</u>.

Cambio de variable: $\operatorname{sen} x = t$; $\cos x\, dx = dt$;

$x = 0 : t = 0$; $x = \frac{\pi}{2} : t = 1$



$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2011} x \cos x (1-\operatorname{sen} x)^{10} dx = \int_0^1 t^{2011} (1-t)^{10} dt$$

$$= B(2012, 11) = \frac{\Gamma(2012)\,\Gamma(11)}{\Gamma(2023)}$$

$$= \frac{2011!\ 10!}{2022!}$$

Hemos usado la definición:

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, \qquad p, q > 0$$

y las propiedades

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \ ; \quad \Gamma(n) = (n-1)!\ , \ n \in \mathbb{N}.$$

14. [18 puntos] Sea γ la circunferencia $\{z: |z| = 2\}$ con la orientación positiva.

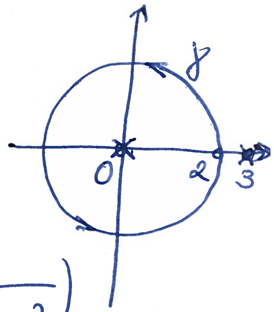
(a) Determinar razonadamente todas las singularidades de la función $f(z) = \dfrac{1}{z^3 - 3z^2}$ y su tipo.

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z-3)}.$$

$\lim\limits_{z\to 0} f(z) = \infty$; $\lim\limits_{z\to 0} z^2 f(z) = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{1}{z-3} = -\dfrac{1}{3} \neq 0, \infty \Rightarrow$ hay un polo doble en $z=0$.

$\lim\limits_{z\to 3} f(z) = \infty$; $\lim\limits_{z\to 3} (z-3)f(z) = \lim\limits_{z\to 3} \dfrac{1}{z^2} = \dfrac{1}{9} \neq 0, \infty \Rightarrow$ polo simple en $z=3$.

(b) Calcular el residuo de f en todas las singularidades contenidas en el interior de γ.



$z=3$: $|z| = 3 > 2 \Rightarrow$ no está en el interior de γ.

$z=0$: $|z| = 0 < 2 \Rightarrow$ sí está en el interior de γ (y es un polo doble)

$$\operatorname{Res}(f; 0) = \lim_{z\to 0} \left(z^2 f(z)\right)' = \lim_{z\to 0} \left(\frac{1}{z-3}\right)' = \lim_{z\to 0} \left(-\frac{1}{(z-3)^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{9}.$$

(c) Evaluar la integral $I = \displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z^3 - 3z^2}\, dz$.

Según el Teorema de los Residuos,

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}(f; 0) = 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) = -\frac{2\pi i}{9}.$$