Análisis Funcional

Cuarto de Licenciatura en Matemáticas, 2011-12

HOJA 9 DE PROBLEMAS

Teorema de Baire. Aplicaciones a las funciones continuas

1. Demostrar las siguientes propiedades.

(a) Toda unión finita o numerable de conjuntos de primera categoría es también de primera categoría.

(b) Si X es un espacio métrico sin puntos aislados, el complemento de cualquier subconjunto de primera categoría en X es de segunda categoría y denso en X.

2. (a) Demostrar que si M es un subespacio propio y cerrado de un espacio normado X, entonces M es diseminado en X.

(b) Deducir del apartado (a) que el espacio $C[a,b]$ es un conjunto diseminado en el espacio $B[a,b]$ de las funciones acotadas en $[a,b]$.

Observación. Conviene recordar que del apartado (a) también se deduce que todo subespacio de dimensión finita de un espacio de Banach es diseminado. Eso permite probar, tal y como se hizo en clase, que la dimensión algebraica de un espacio de Banach siempre es o bien finita o bien no numerable.

3. Demostrar la existencia de una función $f \in C[a,b]$ que no es monótona en ningún intervalo $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$.

Sugerencia. Comprobar que el conjunto de todos los intervalos racionales $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ con ambos extremos racionales, es numerable. Luego considerar los conjuntos de las funciones crecientes y decrecientes en cada uno de esos intervalos y demostrar que todos son diseminados en $C[a,b]$.

4. Demostrar el siguiente teorema de Banach. El conjunto de las funciones en $C[a,b]$ que no tienen derivada en ningún punto es de segunda categoría y denso en $C[a,b]$.

Sugerencia. Conviene considerar el conjunto de las funciones continuas que en, al menos, un punto tienen los cocientes diferenciales $(f(x+h)-f(x))/h$ acotados por n, $n \in \mathbb{N}$, cuando $x+h \in [a,b]$.

Principio de acotación uniforme

5. Sea X un espacio de Banach sobre el cuerpo de escalares $\mathbb{K}$ y $B \subset X$. Si para todo $f \in X^*$ el conjunto $f(B) = \{f(x) : x \in B\} \subset \mathbb{K}$ es acotado, demuéstrese que B es un conjunto acotado en X.

6. Sea X un espacio métrico completo y $f_n : X \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones continuas. Supongamos que para todo $x \in X$, la la sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ está acotada. Demostrar la existencia de una bola $B_r(y) = \{x \in X : \|x-y\| < r\}$ y de una constante $M > 0$ tales que $|f_n(x)| \le M$ para todo $x \in B_r(y)$ y para todo n.

7. Gracias a la desigualdad de Hölder, sabemos que si $g \in L^q(a,b)$, $1 < p < \infty$ y $1/p + 1/q = 1$, entonces para toda función $f \in L^p(a,b)$ la integral $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ es finita. Demostrar el recíproco:

Si $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ es medible y la integral $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ es finita para toda función $f \in L^p(a,b)$, $1 < p < \infty$, entonces $g \in L^q(a,b)$, $1/p + 1/q = 1$.

Sugerencia. Considerar las funciones truncadas g_n que coinciden con g cuando $|g(x)| \leq n$ y son $= n$ en el resto. Luego aplicar el Principio de Acotación Uniforme a los funcionales lineales $L_n \in L^p(a,b)^*$ definidos por $L_n(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)g_n(x)\,dx$.

Teoremas de la aplicación abierta y del gráfico cerrado

8. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ y A_T su matriz respecto a la base canónica $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Demuéstrese que T es una aplicación abierta si y sólo si $\det A_T \neq 0$.

9. Sea X un espacio de Banach separable y $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ un conjunto numerable y denso en B, la bola unidad de X. Definamos el operador $T: l^1 \to X$ mediante $Tx = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n u_n$, para cada $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^1$. Demostrar que T es lineal, acotado y sobreyectivo.

10. Sea X un espacio de Banach separable. Diremos que $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una *base de Schauder* para X si para todo $x \in X$ se cumple $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, e_n$ de manera única, donde $a_n(x)$ son escalares que dependen de x.

Demostrar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, la regla de correspondencia $F(x) = a_n(x)$ define un funcional lineal continuo en X.

Sugerencia. Considerar el espacio de todas las sucesiones numéricas $a = (a_n)_n$ tales que la serie $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ es convergente en X, con la norma $\|a\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\|$ y usar el Teorema de la Aplicación Abierta.

11. Sean $X = C^1[0,1]$ e $Y = C[0,1]$, ambos provistos de la norma natural del máximo, $\|\cdot\|_\infty$. Comprobar que la función $D: X \to Y$, dada por $Df(x) = f'(x)$, es un operador lineal y cerrado pero no acotado. ¿Contradice esto al Teorema del Gráfico Cerrado?

12. Sea (X, μ) un espacio de medida positiva con $\mu(X) < +\infty$ y $\varphi: X \to \mathbb{C}$ una función medible con la siguiente propiedad multiplicadora: para toda $f \in L^1(X,\mu)$, la función $\varphi f \in L^1(X,\mu)$. Comprobar que el *operador de multiplicación puntual* M_φ, definido por $M_\varphi f = \varphi f$, es lineal y demostrar que es continuo en $L^1(X,\mu)$. Luego demostrar que $\varphi \in L^\infty(X,\mu)$.

13. Sean X e Y dos espacios de Banach, $S \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $G(S)$ su gráfico.

(a) Comprobar que $G(S)$ es un subespacio vectorial de $X \times Y$ pero no es completo.

(b) Si se define $T: X \to G(S)$ mediante $Tx = (x, Sx)$, demostrar que T es lineal y cerrado, pero no acotado.

(c) Demostrar que el operador inverso $T^{-1}: G(S) \to X$ existe, es acotado y sobreyectivo, pero no es abierto.