Análisis Funcional

Cuarto de Licenciatura en Matemáticas, 2011-12

HOJA 8 DE PROBLEMAS

Dualidad. Teorema de Hahn-Banach

Notación. $X^* = \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ = espacio dual del espacio normado X.

1. Consideremos el subespacio $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2\,x - y = 0\}$ de $\mathbb{R}^2$ y el funcional $\varphi :\ L \to \mathbb{R}$ dado por $\varphi(x, y) = x$. Demostrar que:

(1) φ es lineal y acotado.

(2) Tiene extensión única a todo $\mathbb{R}^2$ con la misma norma. Hallar explícitamente dicha extensión.

2. Sea X un espacio normado. Demuéstrese que para todo $x_0 \in X$, existe $f_0 \in X^*$ tal que

$$\|f_0\| = \|x_0\| \quad \text{y} \quad f_0(x_0) = \|x_0\|^2 .$$

3. Sea M un subespacio maximal de un espacio normado X (es decir, $M \neq X$ y, si L es un subespacio de X tal que $M \subset L \subset X$, entonces o bien $L = M$ o bien $L = X$). Construir un funcional $F \in X^*$ tal que $\mathcal{N}(F) = M$.

4. Sea M un subespacio cerrado del espacio de Banach X, $x_0 \in X$ y $d(x_0, M) = \text{ínf}\,\{\|x_0 - y\| : y \in M\} = d > 0$. Demostrar la existencia de un funcional $F \in X^*$ con las siguientes propiedades:

(a) $F(x) = 0$, para todo $x \in M$; (b) $F(x_0) = d$; (c) $\|F\| = 1$.

5. Demostrar que el dual de l^1 es isométrico a l^∞, probando la siguiente afirmación: todo funcional lineal continuo en l^1 tiene la forma

$$L(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a}_n\, x_n\,, \quad x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in l^1$$

para una sucesión única $a = (a_1, a_2, a_3, \ldots) \in l^\infty$, siendo $\|L\| = \|a\|_\infty$.

6. Demostrar que el espacio dual de c_0 (el espacio de todas las sucesiones reales convergentes a cero) es isométrico a l^1. Concluir que c_0 no es reflexivo.

7. Demuéstrese que ninguno de los espacios $L^1[0, 1]$, $L^\infty[0, 1]$ es reflexivo, sin identificar sus duales.

Sugerencia: Conviene razonar como en el Corolario 3.2.5. de los apuntes de J. García-Cuerva.