**Análisis Funcional**

Cuarto de Licenciatura en Matemáticas, 2011-12

HOJA 7 DE PROBLEMAS

**Sistemas fundamentales y ortonormales. Maximalidad**

Un subconjunto $S$ en el espacio de Banach $X$ se denomina *fundamental* (o *total*) si su generado lineal $[S]$ es denso en $X$; es decir, si $\overline{[S]} = X$. Un sistema ortonormal (abreviadamente, SON) $\Phi$ en el espacio de Hilbert $H$ se llama *maximal* (o *completo*) si para cualquier SON $\Psi$ en $H$, $\Phi \subset \Psi$ implica $\Psi = \Phi$. Hemos visto en clase que un SON es maximal si y sólo si es fundamental.
Una *base ortonormal* (abreviadamente, BON) en el espacio de Hilbert $H$ es un SON maximal.

**1**. Sea $X$ un espacio de Banach. Demostrar que $X$ es separable si y sólo si existe una sucesión fundamental en $X$.

**2**. Compruébese que los siguientes sistemas de funciones son ortonormales:

(a) el sistema trigonométrico $\{e_n\} = \{e^{2\pi inx} : n \in \mathbb{N}\}$, en el espacio complejo $L^2(0,1)$;

(b) el sistema de Rademacher $\{r_n\}$ (en el espacio real $L^2(0,1)$), definido como

$$r_n(t) = \mathrm{sgn}(\mathrm{sen}(2^n \pi t))\,, n \in \mathbb{N}\,.$$

**3**. Sea $H$ un espacio de Hilbert complejo, $\Phi = \{x_\alpha : \alpha \in I\}$ un sistema ortonormal en $H$ y $(\hat{x}_\alpha)$, $(\hat{y}_\alpha)$ los coeficientes de Fourier (con respecto a $\Phi$) de dos vectores $x$, $y \in H$, respectivamente. Razonar cuántos términos no nulos tiene la serie escalar $\sum_{\alpha \in I} \hat{x}_\alpha \overline{\hat{y}_\alpha}$ y demostrar que converge absoluta e incondicionalmente.

**4**. Dar un ejemplo explícito de un conjunto parcialmente ordenado (CPO) con un único elemento maximal y sin elementos máximos.

**5**. (a) Sea $H$ un espacio de Hilbert y $\Phi$ un SON en $H$. Demuéstrese que $\Phi$ es maximal si y sólo si no existe ningún vector $x \in H \setminus \{0\}$ tal que $x \in \Phi^\perp$.

(b) Compruébese que el sistema ortonormal de Rademacher no es un SON maximal en $L^2(0,1)$.

**6**. Diremos que una familia de funciones $S$ en un espacio normado es *topologicamente independiente* si para todo $x \in S$, el vector $x \notin \overline{[S \setminus \{x\}]}$. Demostrar que toda familia ortonormal en un espacio prehilbertiano es topologicamente independiente.

**7**. Según el teorema fundamental para los sistemas ortonormales, probado en clase, cuando $\Phi = \{x_\alpha : \alpha \in I\}$ es un SON maximal en el espacio de Hilbert $H$ y $x \in H$, entonces la serie de Fourier $\sum_{\alpha \in I} \hat{x}_\alpha x_\alpha$ converge a $x$ incondicionalmente. Demostrar la siguiente afirmación, no probada en clase: si $\{x_\alpha : \alpha \in I\}$ es un SON cualquiera y $x \in H$, entonces la serie $\sum_{\alpha \in I} \hat{x}_\alpha x_\alpha$ converge incondicionalmente (a algún vector en $H$); es decir, todas sus permutaciones convergen al mismo vector.

**8**. Demostrar que se alcanza y calcular el valor mínimo de la integral $\int_0^1 |x^3 - a - bx - cx^2|^2\,dx$, donde $a$, $b$ y $c$ son constantes reales. (*Sugerencia*: conviene pensar en términos de la proyección ortogonal.)