Análisis Funcional

Cuarto de Licenciatura en Matemáticas, 2011-12

HOJA 6 DE PROBLEMAS

Más sobre espacios normados: dimensión finita, completitud

1. Dar demostraciones fáciles de los siguientes hechos, usando resultados pertinentes vistos en clase.

(a) Todo espacio prehilbertiano de dimensión finita es un espacio de Hilbert.

(b) Todo espacio normado de dimensión uno es un espacio de Hilbert, para cierto producto escalar elegido de forma conveniente.

2. Sea X un espacio normado y M y N subespacios de X. Supongamos que M es cerrado y que N tiene dimensión finita. Demostrar que $M + N$ es también un subespacio cerrado.

$Sugerencia$: inducción en $n = \dim N$.

3. Completar las pruebas de los siguientes resultados vistos en clase.

(a) Un espacio normado, X, es completo si y sólo si toda serie en X que converge absolutamente, es convergente (a un vector en X).

Más concretamente, se pide lo siguiente. 1) Demostrar que la completitud es suficiente. 2) Demostrar también el siguiente lema utilizado en la prueba de la necesidad: si una sucesión de Cauchy en un espacio normado tiene una subsucesión convergente, entonces es convergente.

(b) Usar el resultado del apartado (a) para probar el Teorema de Riesz-Fischer: el espacio $L^p(X, \mu)$ es completo, en el caso $1 \le p < \infty$.

Convergencia de operadores y funcionales, núcleo y rango

4. Sea $\mathcal{B}(l^2)$ el espacio de todos los operadores lineales continuos que actúan en l^2.

(a) Definamos los operadores T_n, $T : l^2 \to l^2$ mediante

$$\begin{aligned} T_n(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots) &= (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots, \frac{x_n}{n}, 0, 0, 0, \ldots), \quad n \in \mathbb{N}, \\ T(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots) &= (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots, \frac{x_n}{n}, \ldots). \end{aligned}$$

Para cada uno de estos operadores T, T_n, comprobar que aplica l^2 en sí mismo y calcular su norma. Luego estudiar la convergencia de T_n a T en la norma del espacio $\mathcal{B}(l^2, l^2)$, es decir, ver si $\|T_n - T\| \to 0$ cuando $n \to \infty$.

(b) Lo mismo para los operadores I (la identidad) e I_n, $n \in \mathbb{N}$, siendo

$$\begin{aligned} I_n(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots) &= (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, 0, 0, 0, \ldots), \\ I(x_1, x_2, x_3, \ldots) &= (x_1, x_2, x_3, \ldots). \end{aligned}$$

5. Sean X e Y espacios normados y sea $T:\ X \to Y$ un operador lineal acotado. Recordemos que el *núcleo* del operador T se define como $\mathcal{N}(T) = \{x \in X :\ Tx = 0\}$. El *rango* de T es, por definición, el conjunto $\mathcal{R}(T) = T(X) = \{Tx :\ x \in X\}$.

(a) Probar que $\mathcal{R}(T)$ es un subespacio vectorial de Y y $\mathcal{N}(T)$ es un subespacio cerrado de X.

(b) Comprobar la siguiente propiedad: el operador T es inyectivo si y sólo si $\mathcal{N}(T) = \{0\}$.

(c) Para el operador $T:\ l^2 \to l^2$ definido como

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4, \ldots)\,,$$

determinar $\mathcal{N}(T)$ y $\mathcal{R}(T)$.

6. Sea X un espacio de Banach, I el operador identidad en X y $T \in \mathcal{B}(X)$ un operador (no nulo) de norma estrictamente menor que uno. Demostrar que $\mathcal{N}(T - I) = \{0\}$.

7. (a) ¿Cuándo es inyectivo un operador lineal $T:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$? ¿Cuándo es suprayectivo?

(b) Estudiar si es inyectivo o sobreyectivo el operadores lineal T en l^2 dado por la fórmula

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots) = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots, \frac{x_n}{n}, \ldots)\,.$$

(c) Calcular el núcleo y el rango del operador de Volterra, definido de manera habitual:

$$T:\ C[0,1] \to C[0,1]\,, \quad Tf(x) = \int_0^x f(t)\,dt\,.$$

8. Consideremos el espacio de Banach $C[0,1]$ sobre $\mathbb{R}$. Sea $x \in [0,1]$ un punto arbitrario. Demostrar que el *funcional de evaluación puntual* $L_x:\ C[0,1] \to \mathbb{R}$, definido como $L_x(f) = f(x)$, es lineal y continuo en $C[0,1]$. Describir su núcleo y su rango y calcular su norma.

9. Describir el núcleo $\mathcal{N}(F)$ de un funcional lineal continuo $F \neq \mathbf{0}$ en un espacio de Hilbert. ¿Qué dimensión algebraica tiene el espacio $\mathcal{N}(F)^{\perp}$?