Análisis Funcional

Cuarto de Licenciatura en Matemáticas, 2011-12

HOJA 5 DE PROBLEMAS

Ortogonalidad y proyecciones en espacios de Hilbert

1. Se dice que un espacio de Banach E es *uniformemente convexo* si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si x, $y \in E$, $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ y $\|x - y\| > \varepsilon$, entonces $\left\| \dfrac{x+y}{2} \right\| < 1 - \delta$. Demuéstrese que todo espacio de Hilbert tiene esta propiedad y calcúlese el valor de δ en términos de ε.

2. Dado el plano $M = \{(x, y, z) : \alpha\, x + \beta\, y + \gamma\, z = \delta\}$ en $\mathbb{R}^3$ (dotado del producto escalar habitual), describir el espacio $M^\perp$. Determinar las coordenadas de $P_M(p)$, la proyección ortogonal del punto $p = (x, y, z)$ sobre M y calcular la distancia $d(p, M)$.

3. Comprobar que el conjunto

$$S = \{f \in L^2[0,2] : \int_0^2 f(t)\, dt = 1\, ,\ f(t) \geq 0 \text{ en casi todo punto } t \in [0,2]\}$$

es no vacío, convexo y cerrado en $L^2[0, 2]$ y determinar su elemento de norma mínima.

4. Demostrar que $M = \{f \in L^1[0,1] : \int_0^1 f(t)\, dt = 1\}$ es un subconjunto no vacío, convexo y cerrado del espacio de Banach $L^1[0, 1]$ que contiene infinitos elementos de norma mínima. Concluir que $L^1[0, 1]$, dotado de su norma natural, no es un espacio de Hilbert.

5. Sean M y N dos subespacios cerrados ortogonales de un espacio de Hilbert H. Demostrar que $M + N = \{x + y : x \in M, y \in N\}$ también es un subespacio cerrado de H y que, además, $P_{M+N} = P_M + P_N$.

6. (a) Sea X un espacio de Hilbert y $S \subset X$ arbitrario. Demuéstrese que

$$S^\perp = \overline{[S]}^{\perp}\, .$$

(b) Para una familia de subespacios cerrados $\{M_\alpha : \alpha \in A\}$ del espacio de Hilbert X, demostrar que

$$(\cap_{\alpha\in A} M_\alpha)^\perp = \overline{[\cup_{\alpha\in A} M_\alpha^\perp]}\, .$$

7. Sea

$$S = \{f \in L^2(0,1) : \int_0^1 x^n f(x)\, dx = 0\, , \quad n = 2, 3, 4, \ldots\}\, .$$

Determinar el espacio $S^\perp$, el complemento ortogonal de S en $L^2(0, 1)$.

8. (a) Sea $M = \{x = (x_1, 0, x_3, 0, x_5, x_6, x_7, \ldots) \in l^2\}$. Ver que es un subespacio vectorial de l^2 y determinar su complementario ortogonal $M^\perp$ en l^2. ¿Es M denso en l^2? Hallar también el espacio $M^{\perp\perp}$. ¿Es M cerrado en l^2?

(b) Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo y definamos $M = \{x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in l^2 : x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0\}$. Responder a las mismas preguntas que en el apartado anterior sobre M.

9. $(*)$ Hemos visto en clase que si $-\infty < a < b < +\infty$ y todos los momentos

$$M_n(f) = \int_a^b f(x)x^n dx$$

de una función $f \in C[a,b]$ son iguales a cero, entonces $f \equiv 0$ (teorema de Hausdorff) y que el resultado análogo es cierto también para $L^2(a,b)$.

Compruébese que la función

$$f(x) = e^{-x^{1/4}} \text{ sen } (x^{1/4}), \quad x \in [0,+\infty),$$

es continua y no nula en $[0,+\infty)$ y que, sin embargo, todos sus momentos son nulos.

Operadores lineales continuos y sus normas (primera parte)

10. Para cada uno de los operadores lineales S, $T:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definidos abajo, determinar su norma:

$$S(x,y) = (x+y, x-y)\,, \qquad T(x,y) = \left(x + \frac{y}{2}, \frac{x}{2} + y\right)\,,$$

considerando siempre la norma euclídea, $\|\cdot\|_2$, en $\mathbb{R}^2$.

11. Sea $T:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un operador lineal. Escribiendo $Tx = (T_1x, T_2x, \ldots, T_mx)$, $a_{ij} = T_i(e_j)$, donde e_j son los vectores de la base canónica, obtenemos la matriz $A = [a_{ij}]$ de formato $m \times n$, asociada al operador T. Demuéstrese que todo operador T de este tipo es continuo y que

$$\|T\| \le \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2\right)^{1/2}.$$

Dedúzcase del ejercicio anterior que esta cota no es siempre la mejor posible.

12. Para el operador $T:\ l^2 \to l^2$ definido como

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4, \ldots)\,,$$

comprobar que es lineal y acotado. Calcular $\|T\|$.

13. Para una función fija $\varphi \in C[0,1]$, el *operador de multiplicación* M_φ viene dado por $M_\varphi f(x) = \varphi(x)\, f(x)$, para todo $x \in [a,b]$.

(a) Demostrar que este operador operador es lineal y acotado de $C[0,1]$ en si mismo y calcular su norma.

(b)* Calcular también su norma como operador que actúa en $L^2(0,1)$, en el caso general: $\varphi \in L^\infty(0,1)$.

14. Para cada uno de los operadores dados, comprobar que es lineal y calcular su norma.

(a) $T:\ C[0,1] \to C[0,1]$, $Tf(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

(b) $T:\ C^1[0,1] \to C[0,1]$, $Tf(x) = x\, f'(x)$, donde $C^1[0,1]$ está dotado de la norma natural.

(c) Para $0 < \lambda < 1$, $T_\lambda:\ L^2[0,1] \to L^2[0,1]$, $T_\lambda f(x) = \chi_{[0,\lambda]}(x) \cdot f(x)$, donde, como siempre, χ_A es la función característica del conjunto A.

15. Sea M un subespacio cerrado y no trivial de un espacio de Hilbert, H. Para cada vector $x \in H$, sea $P_M(x)$ su proyección ortogonal a M. Demostrar que el operador $P_M:\ H \to M$ así obtenido es lineal, continuo y tiene norma uno.