Análisis Funcional

Cuarto de Licenciatura en Matemáticas, 2011-12

HOJA 4 DE PROBLEMAS

Espacios de Banach y de Hilbert

1. Verificar que para $0 < p < 1$ la función

$$N_p : L^p[0,1] \to \mathbb{R}\,, \quad N_p(f) = \left(\int_0^1 |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

no es una norma y que, sin embargo, $d_p(f,g) = \displaystyle\int_0^1 |f(x) - g(x)|^p \, dx$ sí define una métrica en $L^p[0,1]$.

2. (a) Demostrar que si F es un subespacio vectorial de un espacio normado E, entonces $\overline{F}$ es un subespacio cerrado.

(b) Recordemos que el *subespacio cerrado generado por un conjunto* A o el *cierre lineal* de A se define como el mínimo espacio cerrado entre todos los espacios vectoriales X tales que $A \subset X \subset E$.

Demostrar que el subespacio cerrado generado por A coincide con la adherencia topológica del conjunto $[A]$, formado por todas las combinaciones lineales finitas de elementos de A. Dicho de otra manera, comprobar que $\overline{[A]} = [\overline{A}]$.

(c) Hallar el subespacio cerrado generado por los polinomios en $B[a,b]$ con la métrica del supremo. También hallar el cierre lineal del conjunto $\{e_n = (0,0,\ldots,0,1,0,0,\ldots) : n \in \mathbb{N}\}$ en l^2.

3. (a) Comprobar que en un espacio normado siempre se cumple $\|x\| \le \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}$.

(b) Demostrar que en un espacio prehilbertiano real las tres siguientes condiciones son equivalentes:

(i) $\langle x, y\rangle = 0$; (ii) $\|x+y\| = \|x-y\|$; (iii) $\|x + \lambda\, y\| \ge \|x\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. En clase demostramos el siguiente teorema (a falta de comprobar un detalle), en el caso real. En un espacio normado X existe un producto escalar compatible con la norma (es decir, tal que $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$ para todo $x \in X$) si y sólo si la norma verifica la ley del paralelogramo:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2\,, \quad x\,, y \in X\,.$$

En la demostración definimos el producto escalar usando la identidad de polarización para el caso real:

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)\,, \quad x\,, y \in X\,,$$

y demostramos que la función de dos variables con valores escalares así definida es hermitiana y definida positiva. Comprobar el siguiente detalle no verificado en clase: que también verifica la propiedad

$$\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle\,, \quad x\,, y\,, z \in X\,.$$

5. Ya sabemos que todos los espacios normados $L^p[0,1]$, $1 \le p \le \infty$, son espacios de Banach. Compruébese que entre ellos solamente $L^2[0,1]$ es Hilbert.

Sugerencia: Búsquese un ejemplo con dos funciones características.

6. Comprobar detalladamente que $C[0,1]$ es un espacio prehilbertiano con el producto interior heredado del espacio $L^2[0,1]$, pero no es un espacio de Hilbert. Sugerencia: considerar la sucesión

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx \quad , & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 \quad , & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

y utilizar las relaciones entre las distintas convergencias en $L^2[0,1]$.

7. $(*)$ Demuéstrese que todo espacio vectorial X tiene una base algebraica (base de Hamel).

Sugerencia: considérese el conjunto $\mathcal{L} = \{L \subset X : L \text{ es linealmente independiente}\}$ con la relación $\subset$ de orden parcial. Obsérvese que S es una base para X si y sólo si es un elemento maximal en $\mathcal{L}$. Luego compruébese que cada colección creciente de conjuntos en $\mathcal{L}$ tiene una cota superior y aplíquese el lema de Zorn.

8. $(*)$ Considerando el conjunto de los reales, $\mathbb{R}$, como espacio vectorial sobre los racionales, $\mathbb{Q}$, y una base de Hamel para dicho espacio, construir una solución discontinua de la ecuación funcional

$$f(x) + f(y) = f(x+y)\,, \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,.$$

9. $(*)$ Sea $1 \leq p \leq \infty$ y (X, μ) un espacio de medida positiva. Demostrar que $L^p(X, \mu)$ es un espacio de Banach.