Análisis Funcional

Cuarto de Licenciatura en Matemáticas, 2011-12

HOJA 3 DE PROBLEMAS

Espacios métricos: separabilidad y compacidad

1. Demostrar que el conjunto de todos los polinomios con los coeficientes reales es denso en el espacio $C[0,1]$ con la métrica $d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$. Luego comprobar que lo mismo es cierto para los polinomios con los coeficientes racionales. Deducir de aquí que el espacio $(C[0,1], d_1)$ es separable.

2. (a) Demostrar que el espacio $L^\infty(0,1)$ no es separable.

(b) ¿Es separable el espacio l^∞ de todas las sucesiones reales acotadas? Razónese la respuesta.

3. Citar dos ejemplos concretos y sencillos de espacios métricos separables pero no compactos.

4. Demostrar que la familia

$$K = \{\alpha \operatorname{arc\,tg}(\beta\, x) : \alpha\,, \beta \in \mathbb{R}\,,\, \alpha^2 + \beta^2 \leq 2012\}$$

es precompacta en $C[a,b]$.

5. Supongamos que una familia de funciones $K \subset C[a,b]$ tiene la siguiente propiedad: para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $f \in K$, si x, $y \in [a,b]$ y $|x-y| < 1/3$, entonces $|f(x) - f(y)| < 1/n$.

¿Es K una familia equicontinua? ¿Es relativamente compacta en $C[a,b]$? Justificar la respuesta.

6. Sea (X,d) un espacio métrico completo y $A \subset X$. Demuéstrese que si A es relativamente compacto, entonces está totalmente acotado. (El recíproco fue probado en clase.)

7. Sea

$$A = \{x = (x_n)_{n=1}^\infty : x \in l^2,\ |x_n| \leq \frac{1}{2^n},\ n = 1, 2, \ldots\}\,.$$

Demuéstrese que A es un conjunto totalmente acotado en l^2. ¿Es precompacto este conjunto? Se pide dar un razonamiento directo, sin usar el ejercicio siguiente.

8. Para una sucesión $x \in l^p$, $1 \leq p < \infty$, denotemos por $\alpha_k(x)$ a su coordenada k-ésima: $x = (\alpha_k(x))_{k=1}^\infty$. Recordemos el siguiente criterio visto en clase.

Un conjunto $K \subset l^p$ es relativamente compacto si y sólo si cumple las siguientes dos condiciones:

(i) Existen $r_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, tales que $|\alpha_k(x)| \leq r_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$;

(ii) La serie $\sum_{k=1}^\infty |\alpha_k(x)|^p$ converge uniformemente en $x \in K$.

Demostramos en clase que las condiciones (i) y (ii) son suficientes para la compacidad. Demuéstrese que también son necesarias.