Análisis Funcional

Cuarto de Licenciatura en Matemáticas, 2011-12

HOJA 2 DE PROBLEMAS

Espacios métricos completos. Teorema del punto fijo y aplicaciones

1. Hallar el límite puntual $x: [0,1] \to \mathbb{R}$, $x = x(t)$, de la sucesión de funciones

$$x_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x_n(t) = t^n - t^{n+1}.$$

Luego comprobar que la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x en la métrica del espacio $C[0,1]$.

2. Supongamos que $-\infty < A < B < +\infty$. Demostrar que

$$U = \{f \in C[a,b] : A < f(x) < B \text{ para todo } x \in [a,b]\}$$

es un conjunto abierto en $C[a,b]$ (con la métrica habitual del máximo) y que el conjunto

$$\overline{U} = \{f \in C[a,b] : A \leq f(x) \leq B \text{ para todo } x \in [a,b]\}$$

es cerrado.

3. (a) Demostrar que el espacio l^∞ de las sucesiones reales y acotadas es completo.

(b) Probar lo mismo para el espacio c_0 de todas las sucesiones $x = (x_n)$ de números reales convergentes a cero, con la misma métrica que en l^∞.

4. Comprobar que el espacio $C[0,1]$, provisto de la distancia típica de L^1: $d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$, es métrico pero no completo. ¿Qué nos dice esto acerca de $(C[0,1], \|\cdot\|_1)$ como subespacio de $L^1[0,1]$?

Sugerencia. Conviene considerar la siguiente sucesión de funciones:

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & \text{si } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{n^2} \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{x}}, & \text{si } \dfrac{1}{n^2} \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

5. ¿Es completo el espacio $B[a,b]$ de las funciones acotadas en el intervalo $[a,b]$ con la métrica usual $d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [a,b]\}$?

6. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable en todo punto $x \in \mathbb{R}$. Demostrar que la ecuación $x = f(x)$ tiene una única solución si se cumple cualquiera de las siguientes condiciones:

(a) $|f'(x)| \leq K < 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$;

(b) $|f'(x)| \geq M > 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Hallar ejemplos de una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $|f'(x)| \leq 1$ para todo x y, sin embargo, $x = f(x)$ o bien no tiene ninguna solución, o bien tiene un número infinito de ellas.

7. (a) Consideremos la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en el espacio completo $[\sqrt{2}, +\infty)$. Compruébese que la desigualdad $|f(x) - f(y)| \leq \dfrac{1}{2}|x - y|$ se cumple para todo x, $y \in [\sqrt{2}, +\infty)$ y que la ecuación $f(x) = x$ no tiene ninguna solución en ese intervalo. ¿Hay contradicción con el Teorema del punto fijo?

(b) Consideremos $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$. Verifíquese que $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ para todo x, $y \in [0, +\infty)$. Razónese si f una aplicación contractiva o no.

8. Dar un ejemplo de un espacio métrico (X, d) y una aplicación $f : X \to X$ con una cantidad infinita (incluso no numerable) de puntos fijos en X y tal que $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ para todo x, $y \in X$.

9. Sea $G : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $0 < m \leq \dfrac{\partial G}{\partial y} \leq M$, para todo $(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}$. Para $f \in C[a, b]$, consideremos la función

$$g(x) = f(x) - \frac{2}{m + M}\, G(x, f(x))\,, \quad x \in [a, b]\,.$$

Demostrar que la ley de correspondencia $Tf = g$ define una aplicación contractiva $T : C[a, b] \to C[a, b]$.

(b) Demostrar el **teorema de la función implícita**: existe una única función $h \in C[a, b]$ tal que $G(x, h(x)) = 0$ para todo $x \in [a, b]$.

10. Utilizando el teorema del punto fijo (en vez de la regla de Cramer), demuéstrese que el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{3}\,x - \frac{1}{4}\,y + \frac{1}{4}\,z - 1 \\ y &= -\frac{1}{2}\,x - \frac{1}{3}\,y + \frac{1}{4}\,z + 2 \\ z &= \frac{1}{5}\,x - \frac{1}{3}\,y + \frac{1}{4}\,z - 2 \end{aligned}$$

tiene exactamente una solución en $\mathbb{R}^3$.

11. Sea X un espacio métrico completo y sea $T : X \to X$ tal que T^n es una aplicación contractiva para algún $n > 1$ entero. Demuéstrese que T tiene un punto fijo en X.

12. $(*)$ Demuéstrese que la ecuación integral de Volterra

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x, y)\, f(y)\, dy + \varphi(x)\,, \quad x \in [a, b]\,,$$

donde $K \in C([a, b] \times [a, b])$ y $\varphi \in C[a, b]$, tiene solución única $f \in C[a, b]$ para todo λ real.

(Sugerencia: utilícese el resultado del ejercicio anterior.)