Análisis Funcional

Cuarto de Licenciatura en Matemáticas, 2011-12

HOJA 10 DE PROBLEMAS

Operadores compactos

1. Ya hemos considerado en varias ocasiones el operador de desplazamiento: $S: l^2 \to l^2$, $S(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$.

(a) Hallar el operador adjunto, S^*; es decir, el operador tal que $\langle Sx, y\rangle = \langle x, S^*y\rangle$, para todo x, $y \in l^2$.

(b) ¿Es S compacto?

2. Comprobar que el operador $T: C[0,1] \to C[0,1]$, definido mediante $Tf(x) = x\,f(x)$, no es compacto.

3. Sea $a = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in l^{\infty}$ una sucesión fija.

(a) Comprobar que $T: l^p \to l^p$, $T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (a_1x_1, a_2x_2, a_3x_3, \ldots)$ define un operador lineal y acotado en l^p, $1 \leq p < \infty$.

(b) Demostrar que $T \in \mathcal{K}(l^p)$ si y sólo si $a \in c_0$; es decir, si y sólo si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

4. (a) Comprobar que la suma de dos operadores compactos es un operador compacto.

(b) Dados tres espacios de Banach X, Y y Z, demostrar que si $K \in \mathcal{K}(X,Y)$ y $T \in \mathcal{B}(Y,Z)$ entonces $TK \in \mathcal{K}(X,Z)$.

5. (a) Sean X un espacio normado de dimensión finita, Y un espacio de Banach y $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Demostrar que $T \in \mathcal{K}(X,Y)$.

(b) Sea X un espacio normado de dimensión infinita y $T \in \mathcal{K}(X)$. Demostrar que T no tiene inverso acotado.

6. (a) Demostrar que el operador de Volterra $T: C[a,b] \to C[a,b]$, definido mediante $Tf(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$, $x \in [a,b]$, es compacto. (Sugerencia. Aplicar el teorema de Ascoli-Arzelà.)

(b) En el espacio $C[-1,1]$, consideremos las funciones f_n en la bola unidad $B_{C[-1,1]}$, lineales a trozos y tales que $f(x) = 0$ cuando $-1 \leq x \leq 0$ y $f(x) = 1$ para $1/n \leq x \leq 1$. Hallar las funciones Tf_n y la función $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $-1 \leq x \leq 1$.

(c) Ya sabemos que, por ser T compacto, el conjunto $T(B_{C[-1,1]})$ tiene que ser precompacto en $C[-1,1]$. Comprobar que, sin embargo, no es un conjunto compacto.