Análisis Funcional

Cuarto de Licenciatura en Matemáticas, 2011-12

HOJA 1 DE PROBLEMAS

Espacios métricos: algunos ejemplos básicos

1. (a) Sea (X, d) un espacio métrico y $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ una función con las siguientes propiedades: estrictamente creciente, subaditiva: $\varphi(x+y) \le \varphi(x)+\varphi(y)$ para todo x, $y \in [0, \infty)$ y, además, $\varphi(0) = 0$. Demuéstrese que entonces la composición $\varphi \circ d : X \times X \to [0, +\infty)$ también define una métrica en X.

(b) Usando el apartado anterior, compruébese que cada una de las fórmulas

$$d(x, y) = \sqrt{|x-y|}\,, \qquad \frac{|x-y|}{1+|x-y|}\,, \qquad \operatorname{arctg}|x-y|$$

define una métrica en $\mathbb{R}$.

(c) Demuéstrese que la fórmula $d(x, y) = |x-y|^p$ define una métrica en $\mathbb{R}$ si $0 < p \le 1$.
(*Sugerencia*: conviene usar la desigualdad elemental: $|1+x|^p \le 1+|x|^p$ para $|x| \le 1$, $0 < p < 1$.)

(d) Compruébese que, para $0 < p < 1$, sólo la segunda de las fórmulas

$$d_p(a, b) = \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k|^p \right)^{1/p}, \qquad d_p(a, b) = \sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k|^p$$

cumple la desigualdad de Minkowski y, por tanto, define una métrica en $\mathbb{R}^n$.

(e) Extender el razonamiento a los espacios l^p, $0 < p < 1$.

2. Sea $e_n = (1, 1, \ldots, 1, 0, 0, 0, \ldots)$ la sucesión cuyos primeros n términos son iguales a uno y los restantes son cero. Para $m \ne n$ y todos los posibles valores $0 < p \le \infty$, calcúlese la distancia $d_p(e_m, e_n)$ en l^p.

3. Utilizando el criterio integral para la convergencia de series positivas, determinar todos los valores positivos de p para los que la sucesión $\mathbf{a} \in l^p$, donde

$$\mathbf{a} = \left(\frac{1}{n^{1/p} \log^\alpha n} \right)_{n=2}^{\infty}.$$

4. Denotemos por $C^1[a, b]$ el conjunto de todas las funciones $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ con la derivada continua en $[a, b]$. Demuéstrese que

$$d(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]\} + \max\{|f'(x) - g'(x)| : x \in [a, b]\}$$

define una métrica en $C^1[a, b]$.

5. (a) Sea $C_c(\mathbb{R})$ el conjunto de todas las funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, iguales a cero fuera de un intervalo de longitud finita (que puede variar de una función a otra). Demostrar que

$$d(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)| : x \in \mathbb{R}\}$$

define una metrica en $C_c(\mathbb{R})$.

(b) Hallar la distancia $d(f, g)$, donde

$$f(x) = \begin{cases} x(x-2) & , \text{ si } x \in (0, 2) \\ 0 & , \text{ si } x = 0 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} (x-1)(3-x) & , \text{ si } x \in (1, 3) \\ 0 & , \text{ si } x = 0 \end{cases}.$$

6. (a) Sean $a_1,\ldots,a_n$, $b_1,\ldots,b_n$ números reales o complejos, p, q, $r > 0$ y $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{r}$. Demostrar la desigualdad generalizada de Hölder para las sumas:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k\, b_k|^r\right)^{1/r} \le \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{1/q} .$$

(b) Bajo las mismas condiciones para p, q y r, demostrar también la desigualdad generalizada de Hölder en forma integral:

$$\left(\int_X |f\, g|^r d\mu\right)^{1/r} \le \left(\int_X |f|^p\, d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X |g|^q\, d\mu\right)^{1/q} ,$$

donde (X,μ) es un espacio de medida (positiva) y f, g son funciones medibles (reales o complejas) definidas en X. Deducir que, si $\mu(X) < \infty$ y $1 \le r \le p < \infty$, entonces

$$\left(\frac{1}{\mu(X)} \int_X |f|^r d\mu\right)^{1/r} \le \left(\frac{1}{\mu(X)} \int_X |f|^p\, d\mu\right)^{1/p}$$

y, por tanto, $L^r(X,\mu) \subset L^p(X,\mu)$.

(c) Comprobar que la función

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\,(1 + |\log x|)}$$

está en $L^2(0,\infty)$ (respecto a la medida de Lebesgue), pero no pertenece a $L^p(0,\infty)$ para ningún otro valor $p > 1$.

7. Sea m la medida de Lebesgue en $[0,1]$.

(a) Comprobar que la función característica del intervalo $[0,1/2]$ pertenece al espacio $L^\infty([0,1],m)$ y, por tanto, a todos los $L^p([0,1],m)$, $0 < p \le \infty$.

(b) Demostrar que, respecto a la relación de coincidir en m-casi todo punto, dicha función no está en la misma clase de equivalencia con ninguna función continua en $[0,1]$.

(c) Calcular la distancia en $L^\infty[0,1]$ y en $L^1[0,1]$ entre la función ya mencionada y la función característica del intervalo $[1/2,1]$.

8. Si $f \in L^p(0,1)$ para algún $p \in (1,\infty)$ y

$$g(x) = f(x) \log^s \frac{2}{x}, \quad s \in \mathbb{R},$$

demostrar que $g \in L^1(0,1)$. Dar un ejemplo que muestre que la afirmación deja de ser cierta cuando $p = 1$ y $s > 0$.

9. Supongamos que μ es una medida de probabilidad en el espacio Ω, es decir, una medida positiva tal que $\mu(\Omega) = 1$, y que f, g son dos funciones medibles y no negativas en Ω tales que $f(x)g(x) \ge 1$ en $\mu-$casi todo punto $x \in \Omega$. Demostrar que

$$\int_\Omega f d\mu \cdot \int_\Omega g d\mu \ge 1$$

y encontrar todas las funciones f y g para las que se tenga la igualdad.