Análisis Funcional

Cuarto de Licenciatura en Matemáticas, 2011-12

HOJA MIXTA I (**Ejercicios de mayor nivel de dificultad**)

La resolución de varios de estos problemas y su posterior presentación en clase o en una sesión especial también podría servir para subir nota, pero sólo se tendrá en cuenta en caso de que la nota media obtenida en los exámenes sea superior a 8,5. En ningún caso es obligatorio estudiar estos problemas.

1. Demostrar que el teorema de Weierstrass para la recta es falso. Más concretamente, se pide demostrar lo siguiente: si una función f se puede aproximar uniformemente por polinomios en todo $\mathbb{R}$, entonces f es un polinomio.

2. Sea $a = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números positivos tales que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge para toda sucesión $b = (b_n)_{n=1}^{\infty}$ en l^2 con $b_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que $a \in l^2$.

3. Sea $f_n(x) = \dfrac{1}{x} \cos \dfrac{n}{x}$, $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que $f_n \notin L^1(0,1)$.

4. Definamos el operador de multiplicación, M_F, mediante la fórmula $M_F(f) = Ff$.

(a) Si $1 \leq p < \infty$ y $F \in L^{\infty}(0,1)$, calcular $\|M_F\|$ como operador del espacio $L^p(0,1)$ en sí mismo.

(b) Determinar todas las funciones F medibles para las que M_F es un operador acotado en $L^p(0,1)$.

5. Para p, $q \in [1,\infty)$ y $p \neq q$, hallar todas las funciones F medibles para las que M_F es un operador acotado de $L^p(0,1)$ en $L^q(0,1)$.

6. Sea $1 < p < \infty$ y definamos

$$Tf(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt\,, \quad 0 < x < \infty\,,\ f \in L^p(0,\infty)\,.$$

Demostrar que T, como operador en $L^p(0,\infty)$, tiene norma $p/(p-1)$.