Análisis Funcional

(Licenciatura en Matemáticas, 2011-12)

Examen parcial, 26 de marzo de 2012

PUNTUACIÓN:

P. 1	P. 2	P. 3	P. 4	TOTAL

Inicial del primer apellido: ________

NOMBRE: ________________________

APELLIDOS: ____

D.N.I. / PASAPORTE: ____________________________

FIRMA: ____

Todos los ejercicios son de desarrollo y cada uno puntúa hasta 2.5 puntos (10 en total).

---

1. ¿Cierto o falso? Razonar la respuesta.
La familia

$$\mathcal{F} = \{f \in C^1[0,1] : \ f(0) = 0\,,\ |f'(t)| \leq \frac{1}{1+t^2} \text{ para todo } t \in [0,1]\}$$

es precompacta en $C[0,1]$.

(CIERTO)

Según el teorema de Ascoli-Arzelà, $\mathcal{F}$ es precompacta $\Leftrightarrow$ es uniformemente acotada y equicontinua.

- Acotación uniforme.

$f(x) = \int_0^x f'(t)dt + f(0)$, por el tma. fundamental del cálculo. Luego (teniendo en cuenta que $f(0)=0$)

$$|f(x)| = \left|\int_0^x f'(t)dt\right| \leq \int_0^x |f'(t)|dt \leq \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$$

$$= \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}, \quad \forall x \in [0,1],\ \forall f \in \mathcal{F}.$$

- Equicontinuidad:

Para $x, y \in [0,1]$, $f(y) - f(x) = f'(c)(y-x)$, para cierto número, c, entre x e y (tma. del valor medio).

Por lo tanto,

$$|f(y) - f(x)| = |f'(c)|\cdot|y-x| \leq \frac{1}{1+c^2}|y-x| \leq |y-x|$$

y podemos tomar $\delta = \varepsilon$ en la definición de la equicontinuidad:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ (a saber, $\delta = \varepsilon$) $\forall f \in \mathcal{F}\ \forall x, y \in [0,1]$

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

2. Sean p, $q \in (1,\infty)$ tales que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, $Q=[0,1]\times[0,1]$ y $K:\, Q\to\mathbb{R}$ una función medible tal que

$$\int_0^1\int_0^1 |K(x,y)|^q\,dx\,dy<\infty\,.$$

Demostrar que la fórmula

$$Tf(x)=\int_0^1 K(x,y)\,f(y)\,dy$$

define un operador lineal y acotado de $L^p(0,1)$ en $L^q(0,1)$.

Dado que p y q son exponentes conjugados, podemos aplicar la desigualdad de Hölder:

$$|Tf(x)| \leq \int_0^1 |K(x,y)|\,|f(y)|\,dy \overset{(H.)}{\leq} \left(\int_0^1 |f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |K(x,y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\Rightarrow |Tf(x)|^q \leq \int_0^1 |K(x,y)|^q dy \cdot \|f\|_p^q$$

$$\Rightarrow \|Tf\|_q^q = \int_0^1 |Tf(x)|^q dx \leq \int_0^1\int_0^1 |K(x,y)|^q dy\,dx \cdot \|f\|_p^q$$

$$\Rightarrow \|Tf\|_q \leq \underbrace{\left(\int_0^1\int_0^1 |K(x,y)|^q dy\,dx\right)^{\frac{1}{q}}}_{\text{finito, por hipótesis}} \cdot \|f\|_p$$

(Es obvio que T es lineal, debido a las propiedades lineales de la integral respecto a dy).

Por tanto, T es un operador acotado de $L^p(0,1)$ en $L^q(0,1)$.

3. ¿Cierto o falso? Existe un $x \in \mathbb{R}$ único tal que

$$2\,\mathrm{sen}\, x - 3\,\mathrm{arc\,tg}\, x - 6x = 0\,.$$

Dar una respuesta razonada, utilizando algún resultado de Análisis Funcional.

(CIERTO)

Observamos que la ecuación dada arriba es equivalente a $\frac{2\,\mathrm{sen}\,x - 3\,\mathrm{arctg}\,x}{6} = x$. Definamos entonces la transformación $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante la fórmula

$$T(x) = \frac{2\,\mathrm{sen}\,x - 3\,\mathrm{arctg}\,x}{6} = \frac{\mathrm{sen}\,x}{3} - \frac{\mathrm{arctg}\,x}{2}.$$

$\mathbb{R}$ es un espacio métrico completo y $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, así que sólo hace falta comprobar que T es una aplicación contractiva:

$$T'(x) = \frac{\cos x}{3} - \frac{1}{2(1+x^2)} \Rightarrow |T'(x)| \leq \frac{|\cos x|}{3} + \frac{1}{2(1+x^2)}$$

$\Rightarrow |T'(x)| \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$. Por el tma. del valor medio,

$$|T(y) - T(x)| = |T'(c)| \cdot |y-x| \leq \frac{5}{6}|y-x| \quad (x<c<y \text{ ó } y<c<x)$$

y $0 \leq \frac{5}{6} < 1$. Sí es contractiva.

Según el tma. del punto fijo de Banach, T tiene un punto fijo único. Luego $\exists!\, x \in \mathbb{R}$ t.q.

$$2\,\mathrm{sen}\,x - 3\,\mathrm{arctg}\,x - 6x = 0$$

4. Sea

$$M = \{x = (x_1, 0, x_3, 0, x_5, 0, x_7, \ldots) \in l^2\}\,.$$

(a) Determinar razonadamente el espacio $M^\perp = \{y \in l^2 \,:\, y \perp M\}$.

Si $y \in M^\perp$, $y = (y_1, y_2, y_3, \ldots)$, entonces $\forall x \in M$, $\langle x, y\rangle = 0$.

Poniendo $x = e_{2n-1} = (\underset{1}{0}, \underset{2}{0}, \ldots, \underset{2n-2}{0}, \underset{2n-1}{1}, \underset{2n}{0}, 0, \ldots) \in M$, obtenemos

$0 = \langle e_{2n-1}, y\rangle = y_{2n-1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Luego $y = (0, y_2, 0, y_4, 0, y_6, 0, \ldots)$

Por otra parte, si $y = (0, y_2, 0, y_4, 0, y_6, 0, \ldots) \in l^2$, entonces $\forall x \in M$:

$$\langle x, y\rangle = x_1 \cdot 0 + 0 \cdot y_2 + x_3 \cdot 0 + 0 \cdot y_4 + \ldots = 0$$

$\Rightarrow y \in M^\perp$.

Conclusión:

$$M^\perp = \{y \in l^2 : y = (0, y_2, 0, y_4, 0, y_6, \ldots)\}$$

$$= \{y \in l^2 : y_1 = y_3 = y_5 = \ldots = 0\}.$$

(b) Dando por hecho que M es un subespacio cerrado en l^2, hallar la proyección ortogonal del vector $e_1 + e_2 = (1, 1, 0, 0, 0, \ldots)$ a M.

Para $x = (x_1, 0, x_3, 0, x_5, 0, \ldots) \in M$ arbitrario, se tiene que

$$\|e_1+e_2-x\|_2^2 = \|(1,1,0,0,0,0,\ldots)-(x_1,0,x_3,0,x_5,0,\ldots)\|_2^2$$

$$= \|(1-x_1, 1, -x_3, 0, -x_5, 0, \ldots)\|_2^2$$

$$= (1-x_1)^2 + 1 + x_3^2 + x_5^2 + \cdots$$

$$\geq 1,$$

con igualdad $\iff 1-x_1 = x_3 = x_5 = x_7 = \cdots = 0$

$\iff x_1 = 1, \; x_3 = x_5 = x_7 = \cdots = 0.$

Por tanto, la distancia mínima dist(e_1+e_2, M) se alcanza cuando $x = (1,0,0,0,0,\ldots) = e_1$, luego la proyección ortogonal del vector e_1+e_2 sobre M es el vector e_1.