Análisis Funcional

(Licenciatura en Matemáticas, 2011-12)

Examen final, 21 de mayo de 2012

PUNTUACIÓN:

P. 1	P. 2	P. 3	P. 4	P. TOTAL

Inicial del primer apellido: ________

NOMBRE: ________________________

APELLIDOS: ____

D.N.I. / PASAPORTE: ____________________________

FIRMA: ____

Todos los ejercicios son de desarrollo. Se pide justificar las respuestas breve pero detalladamente.
Los tres primeros problemas puntúan 3 puntos cada uno y el último, que es algo más difícil, un punto.

1. (a) Sea H un espacio de Hilbert. Supongamos que x, $x_n \in H$, $\|x\| \leq 1$ y $\|x_n\| \leq 1$ para todo n y $\|x_n + x\| \to 2$ cuando $n \to \infty$. ¿Es cierto que $x_n \to x$? Razónese la respuesta.

Según la Ley del Paralelogramo,

$$\|x_n - x\|^2 + \|x_n + x\|^2 \leq 2\|x_n\|^2 + 2\|x\|^2$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \|x_n - x\|^2 \leq 2\|x_n\|^2 + 2\|x\|^2 - \|x_n + x\|^2$$

$$\leq 4 - \|x_n + x\|^2 \longrightarrow 0, \quad n \to \infty.$$

Por tanto, $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$, $n \to \infty$,

así que $x_n \to x$, $n \to \infty$. (CIERTO)

(b) Sea X un espacio normado y $T \in \mathcal{B}(X)$. Demostrar la siguiente fórmula:

$$\|T\| = \sup\{|f(Tx)| : x \in X, \|x\| = 1, f \in X^*, \|f\| = 1\}.$$

Aplicando dos fórmulas básicas vistas en clase:

(1) $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in X, \|x\| = 1\}$, $T \in \mathcal{B}(X)$,

y (2) $\|y\| = \sup\{|f(y)| : f \in X^*, \|f\| = 1\}$, $y \in X$,

obtenemos que

$$\|T\| \overset{(1)}{=} \sup\{\|Tx\| : x \in X, \|x\| = 1\}$$

$$\underset{y=Tx}{\overset{(2)}{=}} \sup\{|f(Tx)| : x \in X, \|x\| = 1, f \in X^*, \|f\| = 1\}.$$

2. (a) Sea $s \in (0, 3/4)$ un número fijo y consideremos el operador lineal dado por la siguiente fórmula:

$$Tf(x) = \int_0^x \frac{f(y)}{(x-y)^s}\, dy, \qquad x \in [0,1], \qquad f \in L^4(0,1).$$

Demostrar que T es un operador acotado de $L^4(0,1)$ en $L^\infty(0,1)$.

Usaremos la desigualdad de Hölder con los exponentes conjugados $p=4$, $q=\frac{4}{3}$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1\right)$:

$$|Tf(x)| \leq \int_0^x \frac{|f(y)|}{(x-y)^s}\, dy \leq \left(\int_0^x |f(y)|^4 dy\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\int_0^x \frac{1}{(x-y)^{\frac{4}{3}s}}\, dy\right)^{\frac{3}{4}}$$

(cambio de variable: $x-y=t$

$$\leq \left(\int_0^1 |f(y)|^4 dy\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\int_0^x \frac{1}{t^{4s/3}}\, dt\right)^{3/4}$$

$$\leq \left(\int_0^1 \frac{dt}{t^{4s/3}}\right)^{3/4} \|f\|_4,$$

independientemente de $x \in [0,1]$.

Observamos que la integral $\int_0^1 \frac{dt}{t^{4s/3}}$ es convergente puesto que $\frac{4s}{3}<1$ por hipótesis. De hecho,

$$\int_0^1 t^{-\frac{4s}{3}} dt = \frac{t^{1-\frac{4s}{3}}}{1-\frac{4s}{3}}\Big|_0^1 = \frac{1}{1-\frac{4s}{3}} = \frac{3}{3-4s}, \text{ finito.}$$

La linealidad de T es obvia por las propiedades de la integral.

$\therefore T \in \mathcal{B}(L^4(0,1), L^\infty(0,1))$.

(b) Sean X, Z dos espacios de Banach e Y un espacio normado, todos ellos sobre el mismo cuerpo de escalares $\mathbb{K}$. Supongamos que $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$ es un operador cerrado y $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Demostrar que $ST \in \mathcal{B}(X, Z)$.

Aplicaremos el Teorema del Gráfico Cerrado. Sabemos que $ST \in \mathcal{L}(X, Z)$, X y Z son espacios de Banach. Suponiendo que $x_n \in X$, $x_n \to 0$, $n \to \infty$ y $STx_n \to z$, $n \to \infty$, tenemos que comprobar que $z = 0$.

$x_n \in X$, $x_n \to 0$ y T es acotado (y, por tanto, continuo)

$\Rightarrow Tx_n \to T(0) = 0$.

$x_n \in X$, $Tx_n \to 0$ y $STx_n = S(Tx_n) \to z$ y S es

cerrado $\Rightarrow$ $z = 0$.

3. (a) Consideremos el espacio $L^2(0,1)$ respecto a la medida de Lebesgue en $(0,1)$. Si una función f en dicho espacio cumple

$$\int_0^1 x^n f(x)\, dx = 0\,, \quad n = 0, 1, 2, \dots\,,$$

demostrar que $f = 0$ en casi todo punto.

Según el Teorema de Weierstrass, los polinomios son densos en $C[0,1]$ (en la norma $\|\cdot\|_\infty$).

$$\|f\|_{L^2}^2 = \int_0^1 |f|^2 dx \leq \|f\|_{L^\infty}^2 \Rightarrow \|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_\infty .$$

Sabemos también que $C[0,1]$ es denso en L^2 (con la norma $\|\cdot\|_2$). Se sigue que los polinomios son densos en $L^2(0,1)$ (en la norma $\|\cdot\|_2$); de hecho, ya lo hemos comentado en clase.

$$0 = \int_0^1 x^n f(x) dx = \langle x^n, f(x) \rangle_{L^2(0,1)} \Rightarrow f \perp x^n,\ n = 0,1,2 \dots$$

$\Rightarrow f$ es ortogonal a todos los polinomios y éstos son densos en $L^2(0,1) \Rightarrow f = 0$ en $L^2(0,1) \Rightarrow f = 0$ en c.t.p.

(b) Razonar si es cierta o falsa la siguiente afirmación. En el espacio $L^2(0,1)$ existe una base ortonormal $\{p_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$, donde cada p_n es un polinomio de grado n.

En primer lugar, $L^2(0,1)$ es un espacio de Hilbert, todas las funciones $e_n(x) = x^n$, $n=0,1,2,\ldots$ pertenecen a $L^2(0,1)$ ya que $\|e_n\|_2^2 = \int_0^1 x^{2n}dx = \frac{1}{2n+1} < +\infty$ y el conjunto $\{e_n : n=0,1,2,\ldots\}$ es linealmente independiente.

Aplicando a $\{e_n : n \geq 0\}$ el procedimiento de Gram-Schmidt, obtenemos un SON $\{p_n : n \geq 0\}$, donde cada p_n es un polinomio de grado n (de hecho, $p_0 = e_0$). Para ver que este SON es una base ortonormal, hemos de ver que es un SON maximal, según el Teorema Fundamental de los Sistemas Ortonormales.

Para ello, basta comprobar que si $f \in L^2(0,1)$ y $f \perp p_n$ para $n=0,1,2,\ldots$, entonces $f=0$ en c.t.p. Por Gram-Schmidt, sabemos que $[\{p_0, p_1, p_2, \ldots\}] = [\{e_0, e_1, e_2, \ldots\}] = [\{1, x, x^2, \ldots\}]$, así que si $f \perp p_n$, $n=0,1,2,\ldots$, se sigue que $f \perp e_n$, $n=0,1,2,\ldots$:

$$\int_0^1 x^n f(x)dx = 0, \quad n=0,1,2,\ldots$$

El apartado (a) nos dice que entonces $f=0$ en c.t.p.

4. Sea H un espacio de Hilbert, M subespacio cerrado de H de dimensión infinita y $T : H \to H$ un operador compacto. Demostrar que la inclusión $M \subset T(H)$ es imposible.

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "P_M T"'] & H \arrow[d, "P_M"] \\ & M \end{tikzcd}$$

Supongamos que $M \subseteq T(H)$. Entonces M es un subespacio de Hilbert de H. Según el Teorema de la Proyección Ortogonal, podemos definir el operador acotado $P_M : H \to M$ (proyección ortogonal) que a cada vector en H le hace corresponder el vector más próximo a x en M. El operador P_M es obviamente sobre ya que $\forall y \in M$, $P_M y = y$.

$T \in \mathcal{K}(H,H)$, $P_M \in \mathcal{B}(H,M) \Rightarrow P_M T \in \mathcal{K}(H,M)$, según la propiedad básica de los operadores compactos vista en clase.

$P_M T$ es sobreyectivo ya que P_M lo es, $P_M T : H \to M$. Según el Teorema de la Aplicación Abierta, $P_M T$ es una aplicación abierta. Si denotamos por B a la bola abierta en H: $B = \{x \in H : \|x\| < 1\}$, se sigue que $P_M T(B) \supseteq B(0,\epsilon)$, una bola abierta centrada en el origen (ya que $0 = P_M T(0) \in P_M T(B)$). Por linealidad,

$P_M T(\frac{1}{\epsilon} B) \supseteq B(0;1) = B$ (donde $\frac{1}{\epsilon} B = \{x \in H : \|x\| < \frac{1}{\epsilon}\}$).

Pero $P_M T$ es compacto y $\frac{1}{\epsilon} B$ acotado $\Rightarrow$ $P_M T(\frac{1}{\epsilon} B)$ es relativamente compacto $\Rightarrow$ $\overline{P_M T(\frac{1}{\epsilon} B)}$ es compacto.

Obviamente, $\overline{P_M T(\frac{1}{\epsilon} B)} \supseteq \bar{B} = \{x \in H : \|x\| \le 1\}$.

$\bar{B}$ es un subconjunto acotado y cerrado contenido en un compacto $\Rightarrow$ $\bar{B}$ es compacto.

Esto contradice el teorema probado en clase que nos dice que la bola unidad cerrada no es compacta en H cuando la dimensión de H es infinita. Contradicción.