

Primera Parte

Las preguntas 1-10 son de tipo test. Se pide elegir una única respuesta en cada problema y apuntarla en la hoja de respuestas.

Cada respuesta correcta vale 8 puntos, incorrecta o doble: -2 puntos, respuesta en blanco: 0 puntos.

1. El conjunto $\{z : |z^2 - 1| = 0\}$ en el plano complejo representa:

- (A) un semiplano, (B) una circunferencia, (C) una recta,
(D) un punto, (E) dos puntos, (F) ninguno de los anteriores.

2. Si $b_n \geq a_n \geq c_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces sabemos con seguridad que

- (A) divergen $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, (B) converge $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ y diverge $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, (C) converge $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$,
(D) diverge $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ y converge $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, (E) convergen $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, (F) diverge $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

3. Para las series alternadas $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n^2 + 1)}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ es cierto lo siguiente:

- (A) ambas convergen absolutamente, (B) la primera diverge y la segunda converge absolutamente,
(C) ambas divergen, (D) la primera converge condicionalmente y la segunda absolutamente,
(E) ambas convergen condicionalmente, (F) ninguna de las opciones anteriores es válida.

4. El valor exacto de la expresión $(1 + i)^{2000}$ es:

- (A) 2^{1000} , (B) 0, (C) i , (D) $2^{1000}i$, (E) 2^{-1000} , (F) ninguno de los anteriores.

5. La suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)}$ es igual a:

- (A) $\frac{3}{2}$, (B) 3, (C) $\frac{2}{3}$, (D) $\frac{3}{4}$, (E) 2, (F) ninguno de los valores anteriores.
-

6. Entre las siguientes integrales impropias de funciones positivas

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^{3/2}} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4+x+1}} dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx,$$

convergen:

- (A) todas ellas, (B) sólo la tercera, (C) la primera y la tercera,
(D) las dos últimas, (E) sólo la primera, (F) ninguna de las tres.
-

7. ¿Cuál de las siguientes sucesiones complejas: $-n^3i$, $\frac{1}{n^2} + (-1)^ni$, $\frac{n-i}{2n}$ converge a un número complejo cuando $n \rightarrow \infty$?

- (A) todas, (B) ninguna, (C) las dos primeras,
(D) sólo la segunda, (E) las dos últimas, (F) sólo la tercera.
-

8. El valor de la integral $\int_0^{+\infty} 2e^{-x^2} x^{5/2} dx$ es:

- (A) $\Gamma(7/4)$, (B) $B(7/2, 3/2)$, (C) $\Gamma(7/2)$, (D) $\Gamma(5/2)$, (E) $\Gamma(3/2)$, (F) otro.
-

9. Para dos números complejos a y b tales que $|1 - \bar{a}b| = 1 = |b|$, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones:

$$|\bar{b} - \bar{a}| = 1, \quad |1 - a\bar{b}| = 1, \quad |a - b| = 1$$

son siempre ciertas?

- (A) ninguna; (B) sólo la primera; (C) las dos últimas;
(D) las dos primeras; (E) todas; (F) sólo la última.
-

10. El radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{(2n)!}$ es igual a:

- (A) 0, (B) 1, (C) $+\infty$, (D) 2, (E) 1/2, (F) ninguno de los anteriores.
-

Segunda Parte

Este último ejercicio es de desarrollo. Puntuación: 20. Se pide presentar una solución razonada, indicando los detalles y nombrando todos los criterios, teoremas, etc. que se usen.

11. Dada la integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{(2x+5) \operatorname{sen}(x^{29}+3)}{(x^2+5x)^{7/5}} dx,$$

se pide decidir cuál de las siguientes propiedades tiene:

- (1) converge absolutamente, (2) converge condicionalmente, (3) diverge, (4) ninguna de las anteriores y luego razonar la respuesta.