Análisis Matemático II (Ing. de Telecomunicaciones): 2008-09 **Modelo de examen**

Las preguntas 1–10 son de tipo test. Respuesta correcta: 5 puntos, incorrecta o doble: -1 punto, en blanco: 0 puntos.

---

1. La suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}$$

es igual a:

(A) $4/3$, (B) 6, (C) 12, (D) 3, (E) ninguno de los anteriores.

---

2. De entre las siguientes integrales impropias:

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{x}{x^3+1} dx\,, \qquad J = \int_e^{+\infty} \frac{\log x}{x} dx\,, \qquad K = \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{2x}} dx$$

convergen

(A) sólo I y J ; (B) sólo J y K ; (C) sólo I y K ; (D) todas ; (E) ninguna.

---

3. De las series infinitas

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}\,, \qquad \sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}\,,$$

podemos afirmar lo siguiente:

(A) S converge condicionalmente y σ absolutamente, (B) divergen, (C) convergen absolutamente, (D) ambas convergen condicionalmente, (E) S diverge y σ converge absolutamente.

---

4. El conjunto de todos los valores posibles de $\log(\sqrt{3}+i)$ está formado por

(A) $\log 2 + \frac{\pi i}{3}$, (B) $\log 2 + \frac{\pi i}{6}$, (C) $\log 2 + \frac{\pi i}{6} + 2\pi n i$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$,

(D) $\log 2 + \frac{\pi i}{3} + 2\pi n i$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, (E) no es ninguno de los anteriores.

---

5. Sea $-1 < x < 1$. La suma de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$$

es igual a:

(A) $\log \frac{1}{1-x}$, (B) $\frac{1}{1+x}$, (C) $\frac{1}{(1-x)^2}$, (D) $\frac{1}{1-x}$, (E) ninguno de los anteriores.

---

6. El valor $B(n, n)$ de la función Beta es:

$$\text{(A)}\ \frac{(n!)^2}{(2n)!}\,, \qquad \text{(B)}\ \frac{[(n-1)!]^2}{(2n-1)^2}\,, \qquad \text{(C)}\ \frac{(n!)^2}{(2n-1)!}\,, \qquad \text{(D)}\ \frac{[(n-1)!]^2}{(2n-1)!}\,, \qquad \text{(E) otro.}$$

---

7. La función compleja:

$$f(z) = \cos x\,(e^{y} + e^{-y}) + i \operatorname{sen} x\,(e^{-y} - e^{y})\,, \qquad z = x + iy\,,$$

cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann en los siguientes puntos del plano:
(A) en todo $z \neq 0$, (B) en ninguno, (C) sólo en $z = 0$,
(D) sólo para z real, (E) en todo $z \in \mathbb{C}$.

---

8. El valor del límite

$$\lim_{z \to 0} \frac{1 - \cos z - \frac{z^2}{2}}{z^4}$$

es:

$$\text{(A)}\ \infty\,, \qquad \text{(B)}\ \frac{1}{24}\,, \qquad \text{(C)}\ \frac{1}{12}\,, \qquad \text{(D)}\ 0\,, \qquad \text{(E)}\ -\frac{1}{24}.$$

---

9. La parametrización $z = 3 + e^{-2\pi i t}$, $0 \leq t \leq 1$, representa la siguiente curva en el plano:

(A) una circunferencia orientada en el sentido negativo; (B) una recta; (C) un segmento;
(D) una circunferencia orientada en el sentido positivo; (E) una semi-circunferencia.

---

10. Sea γ la circunferencia unidad $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ con la orientación negativa. El valor de la integral

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 - 4}$$

es:

(A) 0, (B) $2\pi i$, (C) $-2\pi i$, (D) 1, (E) ninguno de los anteriores.

---

11. Dada la función f, definida mediante

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < x < \pi, \\ 2, & \text{si } x = 0, \\ -1, & \text{si } -\pi < x < 0, \end{cases}$$

su serie de Fourier converge al valor de $f(x)$ para los siguientes valores de x en el intervalo $(-\pi, \pi)$:

(A) para todo $x \neq 0,\ 2$; (B) para todo $x \neq 0$; (C) para todo $x \neq \pm\pi/2$;
(D) para todo x en el intervalo; (E) para todo $x \neq 0,\ \pm\pi/2$.

12. Dada la función $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+4)^2}$, el residuo en su único polo en el semiplano superior es:

$$\text{(A) } 0\,, \qquad \text{(B) } \frac{-i}{32}\,, \qquad \text{(C) } -2\pi i\,, \qquad \text{(D) } \frac{i}{16}\,, \qquad$$ (E) ninguno de los anteriores.

---

13. En este problema conviene usar alguna de las siguientes fórmulas, vistas en clase:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}\,.$$

Sabiendo que f es una función continua en $\mathbb{R}$, periódica con periodo 2π y con los siguientes coeficientes de Fourier:

$$a_0 = 1\,, \quad a_n = \frac{1}{n^2}\,, \quad b_n = 0\,, n \geq 1\,.$$

concluimos que $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)^2\,dx =$

$$\text{(A) } \frac{1}{2} + \frac{\pi^4}{90}\,, \quad \text{(B) } 1 + \frac{\pi^4}{90}\,, \quad \text{(C) } \frac{\pi^4}{90}\,, \quad \text{(D) } \frac{\pi^2}{6}\,, \quad \text{(E) } 1 + \frac{\pi^2}{6}\,, \quad$$ (F) ninguno de los anteriores.

---

14. La función $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z^2 \cos z}$ tiene en $z = 0$:

(A) un polo simple; (B) una polo doble; (C) una singularidad evitable;
(D) una singularidad esencial; (E) no tiene una singularidad ahí.

Ejercicios de desarrollo. Se pide razonar la solución y nombrar los criterios y teoremas usados.

15. [10 puntos] Hallar la transformada de Fourier, $\hat{f}(s)$ de la función $f(x) = \dfrac{1-ix}{1+x^2}$. Conviene recordar que f es la transformada de Fourier de la función

$$u(t) = \begin{cases} e^{-t}, & \text{si } t \geq 0 \\ 0, & \text{si } t < 0 \end{cases}\,.$$

---

15. [10+10=20 puntos]
Sea $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$ la circunferencia unidad, orientada positivamente, y sea

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 - 4\cos t}\,.$$

(a) Parametrizando γ de manera adecuada, demuéstrese que

$$I = i \int_\gamma \frac{dz}{2z^2 - 5z + 2}\,.$$

(b) Aplicando los resultados apropiados sobre la integración compleja, calcúlese el valor exacto de I.